

Đề thi gồm có 01 trang

Bài 1.(1.5 điểm) Cho a, b là hai số thực bất kì, chứng minh rằng ít nhất một trong các phương trình $x^2 - ax + b = 0$ và $x^2 + bx - a - 2 = 0$ có nghiệm.

Bài 2.(2 điểm) Cho hai số thực không âm a, b thỏa $a + b = 2$. Chứng minh

$$\frac{7}{2} \leq \frac{1}{a^3 + b^3} + \frac{3}{ab} \leq \frac{7}{2ab}.$$

Bài 3.(2 điểm) Cho hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 - b$.

- Chứng minh rằng nếu b là số nguyên tố thì $a = b$.
- Chứng minh rằng $2a - 2b + 1$ là số chính phương.

Bài 4.(3 điểm) Cho tam giác nhọn $ABC (AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O) . Vẽ tia phân giác trong AD , cắt đường tròn (O) tại K . Gọi I_B, I_C lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện với đỉnh B, C của tam giác ABC . M là trung điểm BC .

- Chứng minh A, I_B, I_C thẳng hàng. Giả sử $I_B I_C$ cắt đường tròn (O) tại E , chứng minh E, M, K thẳng hàng.
- Chứng minh M, I_B, I_C và D cùng thuộc đường tròn (C) .
- Đường thẳng AD cắt đường tròn (C) tại H . Chứng minh $AH = AK$.

Bài 5.(1.5 điểm) Có 21 thẻ được ghi số từ 1 đến 10 như sau: có 1 thẻ ghi số 0, các số còn lại thì có đúng 2 thẻ mỗi số. Xếp các thẻ thành 1 hàng ngang.

- Chứng minh rằng luôn chọn được 3 thẻ liên tiếp mà tổng bình phương của 3 số trên các thẻ này không chia hết cho 3.
- Chứng minh rằng tồn tại 1 cách xếp mà giữa 2 thẻ số k sẽ có đúng k thẻ tương ứng, với mọi số k từ 1 đến 10.

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN

Bài 1.	<p>Ta có: $\Delta_1 = a^2 - 4b$, $\Delta_2 = b^2 + 4a + 8$</p> <p>Suy ra : $\Delta_1 + \Delta_2 = (a + 2)^2 + (b - 2)^2 \geq 0$</p> <p>nên ít nhất một trong hai số Δ_1, Δ_2 không âm.</p> <p>Nên ít nhất một phương trình có nghiệm.</p>	<p>0.75</p> <p>0.75</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>
Bài 2.	<ul style="list-style-type: none"> • Ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$ <p>Nên $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 2(a^2 - ab + b^2) \geq 2ab$.</p> <p>Suy ra $\frac{1}{a^3 + b^3} + \frac{3}{ab} \leq \frac{7}{2ab}$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ta lại có $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 8 - 6ab$ <p>Suy ra $\frac{1}{a^3 + b^3} + \frac{3}{ab} = \frac{1}{8 - 6ab} + \frac{3}{ab}$</p> <p>Đặt $t = ab \Rightarrow t \in [0, 1]$.</p> <p>Ta chứng minh $\frac{1}{8 - 6t} + \frac{3}{t} \geq \frac{7}{2} \Leftrightarrow 2(24 - 17t) \geq 7t(8 - 6t) \Leftrightarrow 42t^2 - 90t + 48 \geq 0$</p> <p>$\Leftrightarrow 6(t - 1)(7t - 8) \geq 0$ (đúng vì $t \in [0, 1]$)</p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>
Bài 3.		
a)	<p>Nhận xét : $(a + b)(2a - 2b + 1) = b^2 \Rightarrow a \geq b$.</p> <p>Giả sử ngược lại: $a \neq b \Rightarrow a > b$.</p> <p>Ta có: $2a^2 + a = b(3b - 1) : b$.</p> <p>Do b là số nguyên tố nên $\begin{cases} a : b \\ 2a + 1 : b \end{cases}$</p> <p><u>Th1</u>: nếu $a : b$ suy ra $a \geq 2b$.</p> <p>Từ giả thuyết $3b^2 - b = 2a^2 + a \geq 8b^2 + 2b$ (vô lý)</p> <p><u>Th2</u>: nếu $2a + 1 : b$. Do $2a + 1$ lẻ nên $2a + 1 = 3b, 2a + 1 = 5b, \dots$</p> <ul style="list-style-type: none"> - Mà ta lại nhận xét nếu $2a + 1 \geq 7b$ thì $a > b$. Khi đó $3b^2 - b = 2a^2 + a > 7b^2$ (vô lý). - Nếu $2a + 1 = 3b$, thế vào phương trình: $3b \frac{3b - 1}{2} = b(3b - 1)$ (loại) - Nếu $2a + 1 = 5b$, thế vào phương trình: $5b \frac{5b - 1}{2} = b(3b - 1)$ (loại) 	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>
b)	<p>Ta chứng minh $a + b$ và $2a - 2b + 1$ nguyên tố cùng nhau bằng phản chứng.</p> <p>Giả sử ngược lại, gọi p là ước nguyên tố chung của chúng.</p>	

	Suy ra: $AH \cdot AD = AD \cdot AK \Rightarrow AH = AK$	
Bài 5.		
a)	<p>Ta chứng minh bài toán bằng phản chứng, giả sử ngược lại mọi bộ 3 liên tiếp đều có tổng bình phương chia hết cho 3.</p> <p>Ta nhận xét: tổng bình phương của 3 số tự nhiên chia hết cho 3 khi và chỉ khi chúng có cùng số dư khi chia cho 3.</p> <p>Ta chia 21 thẻ này thành 7 bộ 3 liên tiếp. Để thỏa mãn thì mỗi bộ này đều cùng số dư khi chia cho 3, do đó số các số có cùng số dư (khi chia cho 3) phải là bội của 3. Mà chỉ có 7 thẻ chia hết cho 3 nên vô lý.</p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>
b)	<p>Chỉ ra cách xếp thỏa mãn:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Xếp 2 thẻ 10 trước. - Xếp thẻ 0 nằm giữa 2 thẻ này và cạnh của thẻ 10 bên phải. - Xếp 2 thẻ 1 về hai phía của thẻ 10 bên trái. - Xếp 2 thẻ 2 về hai phía của thẻ 10 bên phải - Xếp 2 thẻ 3 về hai phía của thẻ 10 bên trái..... <p style="text-align: center;">.....3 1 10 1 3 2 0 10 2</p>	0.75