

Họ và tên:.....SBD:.....

Câu 1. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. B. $y = \log_{0,5} x$. C. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. D. $y = \log_3 x$.

Câu 2. Cho khối nón có chiều cao $h = 6$ và bán kính đáy $r = 4$. Thể tích của khối nón bằng

- A. 16π . B. 32π . C. 56π . D. 48π .

Câu 3. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Phần ảo của số phức \bar{z} bằng

- A. 2. B. $-2i$. C. -2 D. $2i$.

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình $5^{2x} \geq 125$ là

- A. $\left[-\infty; \frac{3}{2}\right]$. B. $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. C. $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$. D. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Câu 5. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(5x) \leq \log_5 5$ là

- A. $(1; +\infty)$. B. $[1; +\infty)$. C. $(-\infty; 1]$. D. $(0; 1]$.

Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Giá trị của u_2 bằng

- A. 1. B. $\frac{3}{2}$. C. 5. D. 6.

Câu 7. Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 5a^2$ và chiều cao $h = 3a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. $5a^3$. B. $5a^2$. C. $8a^3$. D. $15a^3$.

Câu 8. Đạo hàm của hàm số $y = 5^{x+1}$ là

- A. $y' = 5^{x+1}$. B. $y' = (x+1)5^x$. C. $y' = \frac{5^{x+1}}{\ln 5}$. D. $y' = 5 \cdot 5^x \cdot \ln 5$.

Câu 9. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng 10π và có bán kính đáy $r = 2$. Độ dài đường sinh l của hình nón đã cho bằng

- A. $l = 8$. B. $l = 5$. C. $l = \frac{5}{2}$. D. $l = 6$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int f(x) dx = x^4 + x^2 + C$. B. $\int f(x) dx = 3x^2 + 2x + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 + x^2 + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$.

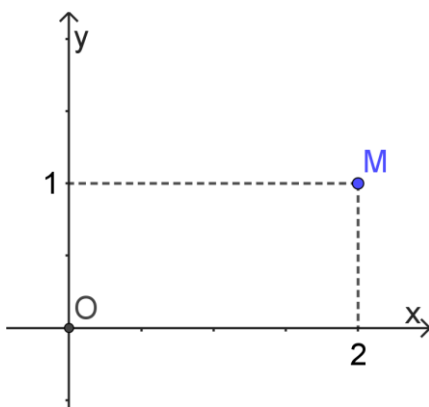
Câu 11. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết khối chóp $A.A'B'C'D'$ có thể tích V thì khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng

- A. $2V$. B. $3V$. C. $6V$. D. $\frac{V}{3}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Hàm số không thể nhận giá trị nào dưới đây:

- A. $|-1|$. B. 6. C. -2 . D. 0,25.

Câu 13. Điểm M trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức z .



Mô đun của z là

- A. $\sqrt{5}$. B. $\sqrt{3}$. C. 5. D. 2.

Câu 14. Lớp 12A có 30 học sinh. Có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh tùy ý của lớp 12A để tham gia 1 trò chơi?

- A. 24360. B. 30^3 . C. 90. D. 4060.

Câu 15. Cho hai số phức $z_1 = 2 - 5i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Phần thực của số phức $z_1 - z_2$ bằng

- A. 3. B. -7. C. 1. D. -3.

Câu 16. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x-2}$ có phương trình là

- A. $y=2$. B. $x=2$. C. $x=3$. D. $y=3$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 9$. Bán kính của mặt cầu (S) là

- A. $R=2$. B. $R=9$. C. $R=1$. D. $R=3$.

Câu 18. Nếu $\int_1^4 f(x)dx = 6$ thì $\int_1^4 \left[\frac{1}{3}f(x) + 1 \right] dx$ bằng

- A. 7. B. 9. C. 5. D. 3.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	-2	3	-2	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(0; 1)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(-\infty; 0)$.

Câu 20. Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

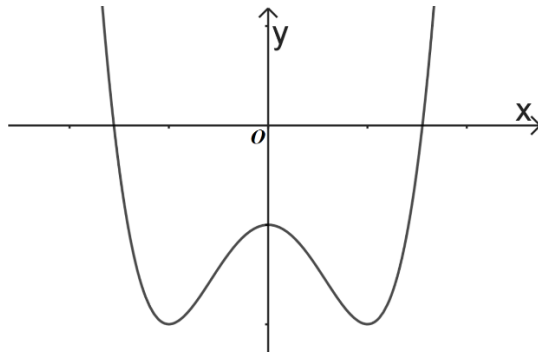
- A. $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log b - \log a$. B. $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\log a}{\log b}$.
 C. $\log(ab) = \log a \cdot \log b$. D. $\log(ab) = \log a + \log b$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; 3)$ và $B(4; 2; -5)$. Tọa độ của vectơ \overrightarrow{AB} là

- A. $(-2; -3; 8)$. B. $(2; 3; -8)$. C. $(2; 1; 8)$. D. $(6; 1; -2)$.

Câu 22. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'	-	0	+	0
y	$+\infty$	1	5	$-\infty$



- A. $y = x^4 - 2x^2 - 1$. B. $y = x^3 - 3x - 1$. C. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. D. $y = -x^3 + 3x - 1$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(4;3;2)$, $C(-1;2;3)$ đường thẳng qua A và song song với BC có phương trình là

- A. $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-2	$+\infty$	

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- A. $x = -2$. B. $x = -1$. C. $x = 3$. D. $x = 2$.

Câu 34. Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 2$ và $\int_0^5 f(u) du = -8$ thì $\int_2^5 f(t) dt$ bằng

- A. 10. B. -6. C. -10. D. 6.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (SCD) bằng

- A. 45° . B. 90° . C. 30° . D. 60° .

Câu 36. Trong một đề thi trắc nghiệm môn Toán có loại câu hỏi trả lời dạng đúng sai. Một câu hỏi có 4 ý hỏi, mỗi ý hỏi học sinh chỉ cần trả lời đúng hoặc chỉ trả lời sai. Nếu 1 ý trả lời đúng đáp án thì được 0,1 điểm, đúng đáp án 2 ý được 0,25 điểm, đúng đáp án 3 ý được 0,5 điểm và đúng đáp án cả 4 ý được 1 điểm. Giả sử một thí sinh làm bài bằng cách chọn phương án ngẫu nhiên để trả lời cho 2 câu hỏi loại đúng sai này. Tính xác suất để học sinh đó được 0,5 điểm ở phần trả lời 2 câu hỏi này.

- A. $\frac{5}{32}$. B. $\frac{11}{64}$. C. $\frac{5}{256}$. D. $\frac{1}{32}$.

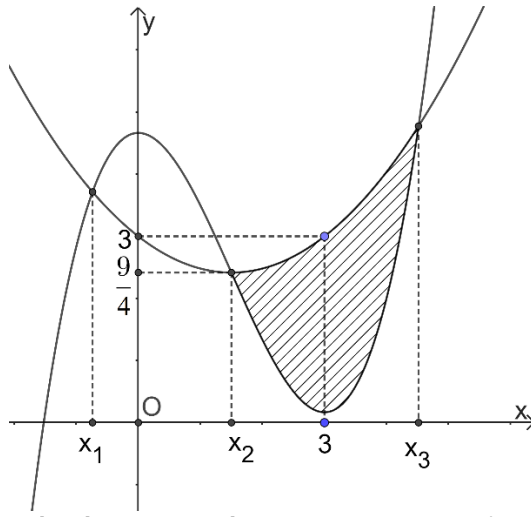
Câu 37. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{khi } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\int_{-1}^3 f(x) dx$ bằng

- A. 2. B. 4. C. 0. D. 6.

Câu 38. Cho khối chóp đều $S.ABC$ có thể tích bằng $3a^3$ và cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh SA , khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (ABC) bằng

- A. $2a\sqrt{3}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $4a\sqrt{3}$. D. $3a\sqrt{3}$.

Câu 39. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ và hàm số bậc hai $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thoả mãn $2x_1x_2x_3 = -9$. Diện tích miền tô đậm nằm trong khoảng nào sau đây?

- A. $\left(6; \frac{13}{2}\right)$. B. $\left(\frac{13}{2}; 7\right)$. C. $\left(5; \frac{11}{2}\right)$. D. $\left(\frac{11}{2}; 6\right)$.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $(0; +\infty)$, thoả mãn các điều kiện $f(1) = 1$ và $(4x^2 - xf'(x) - 1) \cdot e^{2x^2} = x^2 \cdot e^{x+f(x)}, \forall x \in (0; +\infty)$. Biết $f(3) = a + b \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Giá trị $a + 3b$ bằng

- A. 12. B. 14. C. 11. D. 15.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $M(5; 7; 0), Q(-5; 8; -4)$ và hai đường thẳng lần lượt có phương

trình: $\Delta_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 3 \\ z = 3 \end{cases}; \Delta_2: \begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \\ z = 2-t' \end{cases}$. Biết điểm N di động trên đường thẳng Δ_1 và điểm P di động trên đường

thẳng Δ_2 . Giá trị nhỏ nhất của $T = MN + NP + PQ$ là

- A. $\sqrt{369}$. B. $\sqrt{459}$. C. $\sqrt{179}$. D. $\sqrt{289}$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng $\Delta: \frac{x}{5} = \frac{y+4}{7} = \frac{z}{2}$ và đi qua hai điểm $M(2; -1; 2), N(2; 3; -2)$. Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng nào dưới đây?

- A. $(\beta): x + 2y - 2z + 5 = 0$. B. $(P): x + 2y - 2z + 8 = 0$.
C. $(R): x + 2y - 2z + 1 = 0$. D. $(\alpha): x + 2y - 2z + 9 = 0$.

Câu 43. Có bao nhiêu số nguyên $x \in [1; 2024]$ thoả mãn điều kiện sau:

$$\log_{0,4} \left(\log_5 \left(\frac{\log_3^2 x - 6 \log_3 x + 50}{\log_3 x + 4} \right) \right) < 0 ?$$

- A. 1536. B. 1537. C. 1535. D. 1538.

Câu 44. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - mz + 4 = 0$, (với m là tham số). Biết phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 . Các điểm biểu diễn các số phức $z_1, z_2, \frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}$ tạo thành một đa giác lồi có diện tích lớn nhất bằng

- A. $\frac{15}{4}$. B. 3. C. $\frac{15}{8}$. D. 2.

Câu 45. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ thoả mãn điều kiện sau:

$$5^x + 7^y \cdot \sqrt{\log_2(2y^4 + 4y^2x - 16 + 2x^2) - \log_2^2(x + y^2)} = 3 \log_5(y^2 + 5x - 3) + x + 1 ?$$

- A. 6. B. 4. C. 8. D. 2.

Câu 46. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B có $AB = a$, $AD = 4a$ và $BC = x$ với $0 < x < 4a$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích các khối tròn xoay tạo thành khi quay hình thang $ABCD$ (kể cả các điểm trong) quanh đường thẳng BC và AD . Tìm x để $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{4}$.

- A. $x = 2a$. B. $x = a\sqrt{2}$. C. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $x = a$.

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = 2024x^3 + 2025x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $f(|x^2 + mx + 3 - m|) + f(-2x^2 + x - 6) < 0$ nghiệm đúng với $\forall x \in (1; +\infty)$.

- A. 22. B. 24. C. 21. D. 23.

Câu 48. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (9 - m^2)x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 1 điểm cực tiểu?

- A. 6. B. 5. C. 7. D. 4.

Câu 49. Cho số phức w thỏa mãn $|w + 1 + 6i| = |w - 2 + 7i|$ và hai số phức z_1, z_2 cùng thỏa mãn $|z^2 - (\bar{z})^2| = 4$, z_1 có phần thực, phần ảo là các số âm, z_2 có phần thực, phần ảo là các số dương và $|z_2 - z_1|$ bé nhất. Giá trị nhỏ nhất của $|w - z_1| + |w - z_2|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $\left[\frac{11}{2}; 6\right)$. B. $\left[\frac{9}{2}; 5\right)$. C. $\left[5; \frac{11}{2}\right)$. D. $\left[4; \frac{9}{2}\right)$.

Câu 50. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}$, $AA' = AB' = AC'$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ là $\frac{6a}{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. B. $\sqrt{3}a^3$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN CHẤM CÁC CÂU HỎI KHÓ

Câu 36. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-5		27		$-\infty$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $f\left(\frac{7}{2}\right) > f(2)$. **B.** $f(0) > f(2)$. **C.** $f(-2) > f(2)$. **D.** $f(2) > f(-3)$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f'(x) = a(x+1)(x-3) = a(x^2 - 2x - 3)$, $a < 0$.

$$\int_2^{\frac{7}{2}} f'(x) dx = f\left(\frac{7}{2}\right) - f(2) = \frac{-9}{8}a > 0 \Rightarrow f(2) < f\left(\frac{7}{2}\right) \Rightarrow \text{phương án A đúng.}$$

$$\int_2^0 f'(x) dx = f(0) - f(2) = \frac{22}{3}a < 0 \Rightarrow f(2) > f(0) \Rightarrow \text{phương án B sai.}$$

$$\int_2^{-2} f'(x) dx = f(-2) - f(2) = \frac{20}{3}a < 0 \Rightarrow f(2) > f(-2) \Rightarrow \text{Phương án C sai.}$$

$$\int_2^{-3} f'(x) dx = f(-3) - f(2) = \frac{-5}{3}a > 0 \Rightarrow f(2) < f(-3) \Rightarrow \text{phương án D sai.}$$

Câu 37. Trong một đề thi trắc nghiệm môn Toán có loại câu hỏi trả lời dạng đúng sai. Một câu hỏi có 4 ý hỏi, mỗi ý hỏi học sinh chỉ cần trả lời đúng hoặc chỉ trả lời sai. Nếu 1 ý trả lời đúng đáp án thì được 0,1 điểm, đúng 2 ý được 0,25 điểm, đúng 3 ý được 0,5 điểm và đúng cả 4 ý được 1 điểm. Giả sử một thí sinh làm bài bằng cách chọn phương án ngẫu nhiên để trả lời cho 2 câu hỏi loại đúng sai này. Tính xác suất để học sinh đó được 0,5 điểm ở phần trả lời 2 câu hỏi này.

- A.** $\frac{1}{32}$. **B.** $\frac{5}{32}$. **C.** $\frac{11}{64}$. **D.** $\frac{5}{256}$.

Lời giải

Số phần tử KG mẫu là $n(\Omega) = 2^8 = 256$.

Để đạt 0,5 điểm sẽ có các trường hợp sau xảy ra:

TH1. Mỗi câu hỏi HS trả lời đúng 2 câu và sai hai câu, khi đó số điểm đạt được mỗi câu hỏi là 0,25 điểm.

TH2. Có 1 câu hỏi HS trả lời đúng 3 ý sai 1 ý câu hỏi còn lại sai cả 4 ý.

Gọi A là biến cố HS đó được 0,5 điểm khi đó ta có $n(A) = C_4^2 \cdot C_4^2 + 2C_4^3 \cdot C_4^1 = 44$.

$$\text{Vậy xác suất để HS đó được 1 điểm là } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{44}{256} = \frac{11}{64}.$$

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{khi } x < 1 \\ 2x-1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\int_{-1}^3 f(x) dx$ bằng

- A.** 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 6.

Lời giải

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^1 x^3 dx + \int_1^3 (2x-1) dx = 6.$$

Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên $x \in [1; 2024]$ thoả mãn điều kiện

$$\log_{0,4} \left(\log_5 \left(\frac{\log_3^2 x - 6 \log_3 x + 50}{\log_3 x + 4} \right) \right) < 0?$$

A. 1536.

B. 1537.

C. 1535.

D. 1538.

Lời giải

Vì yêu cầu đề bài là $x \in [1; 2024]$, khi đó $\log_3 x + 4 > 0$.

$$\log_{0,3} \left(\log_5 \frac{\log_3^2 x - 6 \log_3 x + 50}{\log_3 x + 4} \right) < 0 \Leftrightarrow \log_5 \frac{\log_3^2 x - 6 \log_3 x + 50}{\log_3 x + 4} > 1 \Leftrightarrow \frac{\log_3^2 x - 6 \log_3 x + 50}{\log_3 x + 4} > 5$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x - 11 \log_3 x + 30 > 0 \Leftrightarrow (\log_3 x - 5)(\log_3 x - 6) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 6 \\ \log_3 x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3^6 \\ 0 < x < 3^5 \end{cases}.$$

Đổi chiều điều kiện $x \in [1; 2024]$ ta có $x \in [1; 243) \cup (729; 2024]$.

Vậy có $243 - 1 + 2024 - 729 = 1537$ giá trị nguyên của x thỏa mãn.

Câu 40. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (9 - m^2)x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 1 điểm cực tiểu?

A. 4.

B. 6.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (9 - m^2)x + 1 \Rightarrow f'(x) = x^2 + 2mx + 9 - m^2.$$

Hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 1 điểm cực tiểu có 2 trường hợp xảy ra.

$$\text{TH1. } f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq m \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

TH2. $f'(x) = 0$ có hai nghiệm không dương phân biệt. Điều kiện là

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 4 \\ -m < 0 \\ 9 - m^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 3.$$

Do đó $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. Vậy có 6 giá trị của tham số m .

Câu 41. Cho số phức w thỏa mãn $|w + 1 + 6i| = |w - 2 + 7i|$ và hai số phức z_1, z_2 cùng thỏa mãn $\left| z^2 - \left(\bar{z} \right)^2 \right| = 4$, z_1 có phần thực, phần ảo là các số âm, z_2 có phần thực, phần ảo là các số dương và $|z_2 - z_1|$ bé nhất. Khi đó giá trị nhỏ nhất của $|w - z_1| + |w - z_2|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left[4; \frac{9}{2} \right)$.

B. $\left[\frac{11}{2}; 6 \right)$.

C. $\left[\frac{9}{2}; 5 \right)$.

D. $\left[5; \frac{11}{2} \right)$.

Lời giải

Giả sử $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbf{R}$),

$$|w + 1 + 6i| = |w - 2 + 7i| \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 6)^2 = (x - 2)^2 + (y + 7)^2 \Leftrightarrow y = 3x - 8. \text{ Do đó } w \text{ có điểm biểu diễn thuộc đường thẳng } \Delta: y = 3x - 8.$$

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbf{R}$), $|z^2 - (\bar{z})^2| = 4 \Leftrightarrow |xy| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases}$. Vì z_1 có phần thực, phần ảo là các

số âm, z_2 có phần thực, phần ảo là các số dương nên chúng có các điểm biểu diễn là M, N cùng thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$.

Giả sử $M\left(a; \frac{1}{a}\right); N\left(-b; \frac{1}{-b}\right)$ ($a, b > 0$). Khi đó $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a+b)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2} \geq \sqrt{4ab + \frac{4}{ab}} \geq \sqrt{8}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M(1;1); N(-1;-1)$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $MP + NP$ với $P(x; 3x-8) \in \Delta$. Ta có

$$\begin{aligned} MP + NP &= \sqrt{(x-1)^2 + (3x-9)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (3x-7)^2} = \sqrt{10x^2 - 56x + 82} + \sqrt{10x^2 - 40x + 50} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{10}x - \frac{14}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2} + \sqrt{\left(2\sqrt{10} - \sqrt{10}x\right)^2 + (\sqrt{10})^2} \geq \sqrt{\left(\frac{4}{5}\sqrt{10}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\sqrt{10}\right)^2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{\sqrt{10}x - \frac{14\sqrt{10}}{5}}{\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{10} - \sqrt{10}x}{\sqrt{10}} > 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow P\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng $\Delta: \frac{x}{5} = \frac{y+4}{7} = \frac{z}{2}$ và đi qua hai điểm $M(2; -1; 2), N(2; 3; -2)$. Khi đó (S) tiếp xúc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $(P): x + 2y - 2z + 8 = 0$.

B. $(R): x + 2y - 2z + 1 = 0$.

C. $(\alpha): x + 2y - 2z + 9 = 0$.

D. $(\beta): x + 2y - 2z + 5 = 0$.

Lời giải

$$I \in \Delta \Rightarrow I(5t; -4 + 7t; 2t);$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } IM^2 = IN^2 &\Leftrightarrow (5t-2)^2 + (7t-3)^2 + (2t-2)^2 = (5t-2)^2 + (-7+7t)^2 + (2t+2)^2 \Leftrightarrow t=1 \\ &\Rightarrow I(5; 3; 2), R = IM = 5. \end{aligned}$$

$$d(I; (P)) = 5 = R \Rightarrow (S) \text{ tiếp xúc với } (P): x + 2y - 2z + 8 = 0;$$

Câu 43. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$5^x + 7^y \cdot \sqrt{\log_2(2y^4 + 4y^2x - 16 + 2x^2) - \log_2^2(x + y^2)} = 3\log_5(y^2 + 5x - 3) + x + 1$$

A. 2.

B. 6.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

$$\text{ĐK: } \log_2(2y^4 + 4y^2x - 16 + 2x^2) - \log_2^2(x + y^2) \geq 0 \Leftrightarrow \log_2\left[2(y^2 + x)^2 - 16\right] \geq \log_2^2(y^2 + x) \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = \log_2(y^2 + x), \text{ ta có } y^2 + x = 2^t.$$

$$\text{Áp dụng BĐT Cô-si ta có } 2^{t^2} + 16 \geq 2\sqrt{2^{t^2+4}} = 2 \cdot 2^{\frac{t^2+4}{2}} \geq 2 \cdot 2^{2t} \Rightarrow 2^{t^2} \geq 2 \cdot 2^{2t} - 16$$

$$\Rightarrow t^2 \geq \log_2(2 \cdot 2^{2t} - 16). \text{ Hay } \log_2^2(x^2 + y) \geq \log_2\left[2(x^2 + y)^2 - 16\right]. \text{ Do đó từ } (*) \text{ suy ra:}$$

$$y^2 + x = 4 \Leftrightarrow y^2 = 4 - x. \text{ Khi đó PT đã cho trở thành: } 5^x = 3\log_5(4x + 1) + x + 1$$

$$\Leftrightarrow 5^x + 3x = 5^{\log_5(4x+1)} + 3\log_5(4x+1) \Leftrightarrow x - \log_5(4x+1) = 0.$$

$$\text{Xét } f(x) = x - \log_5(4x+1) \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{4}{(4x+1)\ln 5}; f''(x) = \frac{16}{(4x+1)^2 \ln 5} > 0, \forall x > -\frac{1}{4}$$

Nên $f'(x)$ liên tục và đồng biến trên $\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$; $f'(0) = 1 - \frac{4}{\ln 5} < 0$; $f'(1) = \frac{16}{\ln 5} > 0$ nên tồn tại

$x_0 \in (0; 1): f'(x_0) = 0$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
y'		0	
		$-$	$+$
y	$+\infty$		$+\infty$

$f(x_0)$

Dựa vào BBT ta có hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(x_0; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng

$$\left(-\frac{1}{4}; x_0\right).$$

Để thấy PT $f(x) = 0$ có duy nhất nghiệm $x = 0$ trên $\left(-\frac{1}{4}; x_0\right)$ và trên $(x_0; +\infty)$ PT cũng có duy

nhất nghiệm $x = 1$.

$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow y = \pm 2; \text{ Với } x = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } (x; y) = (0; \pm 2); (x; y) = (1; \pm\sqrt{3})$$

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $M(5; 7; 0), Q(-5; 8; -4)$ và hai đường thẳng lần lượt có

$$\text{phương trình: } \Delta_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 \\ z = 3 \end{cases}; \Delta_2: \begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \\ z = 2 - t' \end{cases}. \text{ Biết điểm } N \text{ di động trên đường thẳng } \Delta_1 \text{ và điểm } P \text{ di}$$

động trên đường thẳng Δ_2 . Khi đó giá trị nhỏ nhất của $T = MN + NP + PQ$ là

A. $\sqrt{289}$.

B. $\sqrt{459}$.

C. $\sqrt{179}$.

D. $\sqrt{369}$.

Lời giải

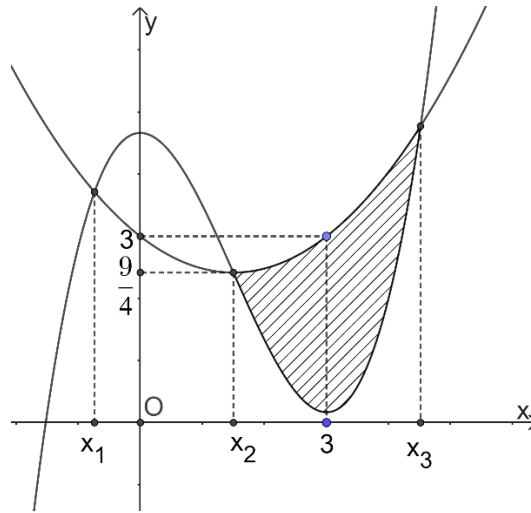
$$N \in \Delta_1 \Rightarrow N(1+t; 3; 3); P \in \Delta_2 \Rightarrow P(-5; 3; 2-t'). \text{ Ta có:}$$

$$MN + NP + PQ = \sqrt{(t-4)^2 + (-5)^2} + \sqrt{(-t-6)^2 + (-t'-1)^2} + \sqrt{(-5)^2 + (-6+t')^2}$$

$$\geq \sqrt{[(t-4) + (-t-6) - 5]^2} + [-5 + (-1-t') + (-6+t')]^2 = \sqrt{369}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \frac{t-4}{-5} = \frac{-6-t'}{-1-t'} = \frac{-5}{-6+t'} > 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{9}{4} \\ t' = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N\left(-\frac{5}{4}; 3; 3\right) \\ P(-5; 3; 0) \end{cases}$$

Câu 45. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ và hàm số bậc hai $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $2x_1x_2x_3 = -9$. Diện tích miền tô đậm nằm trong khoảng nào sau đây?

- A. $\left(5; \frac{11}{2}\right)$. B. $\left(\frac{11}{2}; 6\right)$. C. $\left(6; \frac{13}{2}\right)$. D. $\left(\frac{13}{2}; 7\right)$.

Lời giải

Ta có: $g(x) = ax^2 + bx + c$. Vì Parabol đối xứng qua trục nên điểm $I\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ và đi qua điểm $(0; 3)$ nên ta có hpt

$$\begin{cases} c = 3 \\ 3a + b = 0 \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -1 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{3}x^2 - x + 3.$$

Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại $x = 0, x = 3 \Rightarrow f'(x) = k(x^2 - 3x) \Rightarrow f(x) = k\left(\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2}\right) + m$

Đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua $I\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ nên $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{9}{4} = -\frac{9}{4}k + m, (1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow k\left(\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2}\right) + m = \frac{1}{3}x^2 - x + 3 \Leftrightarrow \frac{k}{3}x^3 - \left(\frac{3k}{2} + \frac{1}{3}\right)x^2 + x + m - 3 = 0$$

Theo định lý Viet ta có: $2x_1x_2x_3 = -9 \Leftrightarrow x_1x_2x_3 = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow -\frac{m-3}{\frac{k}{3}} = -\frac{9}{2} \Rightarrow 3k - 2m = -6, (2)$

Từ (1), (2): $k = 1, m = \frac{9}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{9}{2}$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{6}x^2 + x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{7} \\ x = \frac{3}{2} \\ x = 2 - \sqrt{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \int_{\frac{3}{2}}^{2+\sqrt{7}} \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{6}x^2 - x - \frac{3}{2}\right) dx \approx 6,431$$

- Câu 46.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $(0; +\infty)$, thỏa mãn $f(1) = 1$ và $(4x^2 - xf'(x) - 1) \cdot e^{2x^2} = x^2 \cdot e^{x+f(x)}, \forall x \in (0; +\infty)$. Biết $f(3) = a + b \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Giá trị $a + 3b$ bằng
- A.** 12. **B.** 14. **C.** 11. **D.** 15.

Lời giải

Ta có:

$$(4x^2 - xf'(x) - 1) \cdot e^{2x^2} = x^2 \cdot e^{x+f(x)} \Leftrightarrow \frac{4x^2 - xf'(x) - 1}{x^2} \cdot e^{2x^2 - f(x)} = e^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(4x - f'(x)) \cdot e^{2x^2 - f(x)} - x' \cdot e^{2x^2 - f(x)}}{x^2} = e^x \Leftrightarrow \left(\frac{e^{2x^2 - f(x)}}{x} \right)' = e^x$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$$\frac{e^{2x^2 - f(x)}}{x} = \int e^x dx = e^x + C$$

$$\text{Cho } x = 1 \Rightarrow \frac{e^{2 \cdot 1^2 - f(1)}}{1} = e^1 + C \Rightarrow C = 0.$$

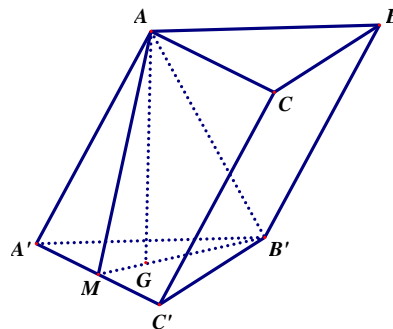
Suy ra

$$\frac{e^{2x^2 - f(x)}}{x} = e^x \Rightarrow e^{2x^2 - f(x)} = x \cdot e^x \Rightarrow 2x^2 - f(x) = x + \ln x \Rightarrow f(x) = 2x^2 - x - \ln x$$

$$\Rightarrow f(3) = 15 - \ln 3 \Rightarrow a + 3b = 15 - 3 = 12$$

- Câu 47.** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}$, $AA' = AB' = AC'$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ là $\frac{6a}{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng
- A.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $\sqrt{3}a^3$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải



$$\Delta A'B'C' \text{ đều cạnh } a\sqrt{2} \text{ nên } B'M = \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow GM = \frac{1}{3} B'M = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Gọi G là trọng tâm $\Delta A'B'C'$. Vì $AA' = AB' = AC'$ nên $AG \perp (A'B'C')$.

Ta có

$$d(B; ACC'A') = d(B'; ACC'A') = 3d(G; ACC'A') = 3GK = 3 \cdot \frac{GM \cdot AG}{\sqrt{GM^2 + AG^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6a}{5} = 3 \cdot \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6} \cdot AG}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 + AG^2}} \Leftrightarrow AG = 2a$$

$$\text{Suy ra } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AG = \frac{(a\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \sqrt{3}a^3$$

Câu 48. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - mz + 4 = 0$, (với m là tham số). Biết phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 . Các điểm biểu diễn các số phức $z_1, z_2, \frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}$ tạo thành một đa giác lồi có diện tích lớn nhất bằng

A. $\frac{15}{8}$.

B. 2.

C. $\frac{15}{4}$.

D. 3.

Lời giải

Điều kiện để các điểm biểu diễn các số phức $z_1, z_2, \frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}$ tạo thành một đa giác lồi là: $\begin{cases} m^2 - 16 < 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$

Gọi $z_1 = a + bi$ ($a \neq 0; b \neq 0$) $\Rightarrow z_2 = \bar{z}_1 = a - bi$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} z_1 + z_2 = m = 2a \\ z_1 \cdot z_2 = |z_1|^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{m}{2} \\ b^2 = 4 - \frac{m^2}{4} = \frac{16 - m^2}{4} \end{cases}$$

Mặt khác, $\frac{1}{z_2} = \frac{z_1}{4} = \frac{a}{4} + \frac{b}{4}i$; $\frac{1}{z_1} = \frac{z_2}{4} = \frac{a}{4} - \frac{b}{4}i$

Gọi các điểm biểu diễn các số phức $z_1, z_2, \frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}$ lần lượt là $A(a; b); B(a; -b); C\left(\frac{a}{4}; -\frac{b}{4}\right); D\left(\frac{a}{4}; \frac{b}{4}\right)$

Diện tích đa giác lồi cần tính là

$$S_{ABCD} = \frac{2|b| + 2\left|\frac{b}{4}\right|}{2} \cdot \left|a - \frac{a}{4}\right| = \frac{15}{16} \cdot |a||b| = \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{2} |m| \sqrt{\frac{16 - m^2}{4}}$$

$$= \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{m^2(16 - m^2)} \leq \frac{15}{64} \cdot \frac{1}{2} (m^2 + 16 - m^2) = \frac{15}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi $m^2 = 16 - m^2 \Rightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$.

Câu 49. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B có $AB = a$, $AD = 4a$ và $BC = x$ với $0 < x < 4a$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích các khối tròn xoay tạo thành khi quay hình thang $ABCD$ (kể cả các điểm trong) quanh đường thẳng BC và AD . Tìm x để $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{4}$.

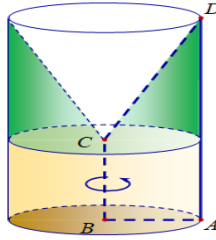
A. $x = a$.

B. $x = 2a$.

C. $x = a\sqrt{2}$.

D. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

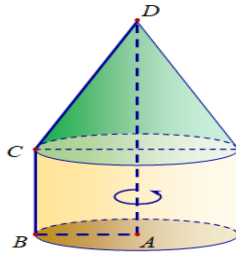
Lời giải



- Khi quay hình thang $ABCD$ (kẻ các điểm trong) quanh đường thẳng BC ta được khối tròn xoay có thể tích là

$$V_1 = V_3 - V_4 = 4\pi a^3 - \frac{1}{3}\pi(4a-x)a^2 = \frac{8}{3}\pi a^3 + \frac{1}{3}\pi a^2 x = \frac{1}{3}\pi a^2(8a+x).$$

Trong đó, V_3 là thể tích khối trụ tròn xoay có bán kính đáy bằng a , chiều cao bằng $4a$; V_4 là thể tích khối nón tròn xoay có bán kính đáy bằng a , chiều cao bằng $4a-x$.



- Khi quay hình thang $ABCD$ (kẻ các điểm trong) quanh đường thẳng AD ta được khối tròn xoay có thể tích là

$$V_2 = V_5 + V_4 = \pi a^2 x + \frac{1}{3}\pi(4a-x)a^2 = \frac{4}{3}\pi a^3 + \frac{2}{3}\pi a^2 x = \frac{1}{3}\pi a^2(4a+2x).$$

Trong đó, V_5 là thể tích khối trụ tròn xoay có bán kính đáy bằng a , chiều cao bằng x .

Theo giả thiết ta có: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{8a+x}{4a+2x} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 32a+4x = 20a+10x \Leftrightarrow x = 2a.$

Câu 50. Cho hàm số $f(x) = 2024x^3 + 2025x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $f(|x^2 + mx + 3 - m|) + f(-2x^2 + x - 6) < 0$ nghiệm đúng với $\forall x \in (1; +\infty)$.

A. 23.

B. 22.

C. 24.

D. 21.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 6072x^2 + 2025 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên \mathbb{R} .

Từ giả thiết suy ra $f(|x^2 + mx + 3 - m|) < -f(-2x^2 + x - 6) = f(2x^2 - x + 6)$

(do $f(x) = 2024x^3 + 2025x$ là hàm số lẻ)

$$\Leftrightarrow |x^2 + mx + 3 - m| < 2x^2 - x + 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx + 3 - m < 2x^2 - x + 6 \\ x^2 + mx + 3 - m > -2x^2 + x - 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(x-1) < x^2 - x + 3 \\ m(x-1) > -3x^2 + x - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{x^2 - x + 3}{x-1} = g(x) \\ m > \frac{-3x^2 + x - 9}{x-1} = h(x) \end{cases}$$

Ta có $g'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} (t/m) \\ x = 1 - \sqrt{3} (L) \end{cases} \Rightarrow \min g(x) = g(1 + \sqrt{3}) = 1 + 2\sqrt{3}$

$$h'(x) = \frac{-3x^2 + 6x + 8}{(x-1)^2}; h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{33}}{3} (t/m) \\ x = \frac{3 - \sqrt{33}}{3} (L) \end{cases} \Rightarrow \max h(x) = h\left(\frac{3 + \sqrt{33}}{3}\right) = -5 - 2\sqrt{33}$$

Suy ra $\begin{cases} m \geq -5 - 2\sqrt{33} \\ m \leq 1 + 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow -5 - 2\sqrt{33} \leq m \leq 1 + 2\sqrt{3}, m \in \mathcal{Z} \Rightarrow m \in \{-16; -16; \dots; 4\}$.

Vậy có 21 giá trị cần tìm.