



**Câu 11.** Tổng của hai số là 16. Nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ được thương là 4 dư 1. Hai số đó là

- A. 10 và 6.            B. 14 và 2.            C. 13 và 3.            D. 11 và 5.

**Câu 12.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB=4, BC=5$  thì  $\sin \angle ABC$  có giá trị là

- A.  $\frac{1}{5}$ .                    B.  $\frac{3}{4}$ .                    C.  $\frac{4}{5}$ .                    D.  $\frac{3}{5}$ .

**PHẦN II. TỰ LUẬN (7,0 điểm)**

**Câu 1 (1,5 điểm).** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}}$  với  $x > 0$ .

- Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 16$ .
- Rút gọn biểu thức  $B$ .
- Tìm  $x$  để  $\frac{A}{B} > \frac{4}{3}$ .

**Câu 2 (2,0 điểm).**

1. Cho hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2x - y = m - 2 \\ x + 2y = 3m + 4 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

- Giải hệ phương trình khi  $m = 1$ .
- Tìm  $m$  để hệ phương trình có nghiệm  $(x; y)$  thỏa mãn:  $x^2 + y^2 = 10$ .

2. Cho parabol  $(P): y = -2x^2$  và đường thẳng  $(d): y = 3x + m - 1$ .

- Tìm  $m$  biết đường thẳng  $(d)$  cắt đường thẳng  $(d')$ :  $y = 2x - 1$  tại điểm  $A$  có hoành độ bằng 2.
- Tìm  $m$  để đường thẳng  $(d)$  cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt nằm bên trái trục tung.

**Câu 3 (3,0 điểm).** Cho đường tròn  $(O)$  có hai đường kính  $AB$  và  $CD$  vuông góc với nhau.

Trên cung nhỏ  $AC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $AM = AO$ .

- Chứng minh bốn điểm  $A; I; M; O$  cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh  $sđ \widehat{MC} = \frac{1}{3} sđ \widehat{BD}$ .
- Dây  $MB$  cắt  $CD$  tại  $I$ , đoạn thẳng  $MO$  cắt  $AI$  tại  $H$ . Chứng minh  $AH \cdot AI = MI \cdot MB$ .
- Điểm  $I$  nằm trên dây  $PQ$ . Xác định vị trí của dây  $PQ$  để  $\angle OQP$  lớn nhất.

**Câu 4 (0,5 điểm).** Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $x + y + z \leq 1$ . Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức  $P = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{2024}{xy + yz + zx}$ .

-

-HẾT--

**I. Trắc nghiệm (3,0 điểm): Đúng mỗi câu ghi 0,25 điểm.**

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	B	C	A	B	C	A	C	B	D	D	C	D

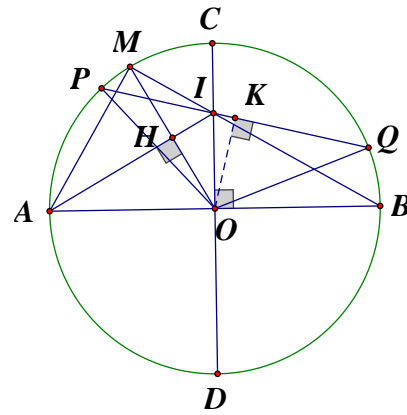
Câu	Nội dung	Điểm
<b>Câu 1</b> <b>(1,5đ)</b>	a. Với $x=16$ ta có $A = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{2+\sqrt{16}}{\sqrt{16}} = \frac{2+4}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ .	<b>0,5đ</b>
	b. Với $x > 0$ , rút gọn $B$ được: $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} =$ $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ $= \frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ $= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$	<b>0,25đ</b> <b>0,25đ</b>
	Có: $\frac{A}{B} = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ Để: $\frac{A}{B} > \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} > \frac{4}{3}$ $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{4}{3} > 0$ $\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}+3-4\sqrt{x}}{3\sqrt{x}} > 0$ $\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{x}}{3\sqrt{x}} > 0$ $\Leftrightarrow 3 - \sqrt{x} > 0 \text{ (Vì } 3\sqrt{x} > 0 \text{ với } x > 0)$ $\Leftrightarrow x < 9$  Kết hợp với điều kiện, ta có: $0 < x < 9$ thì $\frac{A}{B} > \frac{4}{3}$	<b>0,25đ</b> <b>0,25đ</b>

<p><b>Câu 2.</b> (2 đ)</p>	<p>1</p> <p>a. Với <math>m=1</math> ta có hệ phương trình:</p> $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ <p><math>\Rightarrow</math> Vậy với <math>m=1</math> nghiệm <math>(x,y)</math> của hệ phương trình là: <math>(1;3)</math></p> <p>b. Ta có <math>\begin{cases} 2x - y = m - 2 \\ x + 2y = 3m + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ y = m + 2 \end{cases}</math></p> <p>Để <math>x^2 + y^2 = 10 \Leftrightarrow m^2 + (m+2)^2 = 10</math></p> $\Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0$ $\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$ <p>2.</p> <p>a) Xác định được tung độ điểm A bằng 3 Xác định được <math>m = -2</math></p> <p>b) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng <math>(d)</math> và parabol <math>(P)</math> là: <math>-2x^2 = 3x + m - 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + m - 1 = 0</math> (*)</p> $\Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot (m - 1) = 17 - 8m.$ <p>Để đường thẳng <math>(d)</math> cắt parabol <math>(P)</math> tại 2 điểm phân biệt thì</p> $\Delta > 0 \Leftrightarrow 17 - 8m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{17}{8}.$ <p>Theo Vi - ét ta có: <math>\begin{cases} S = \frac{-3}{2} \\ P = \frac{m-1}{2} \end{cases}</math></p> <p>Để phương trình có hai nghiệm phân biệt âm thì</p> $\begin{cases} S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-3}{2} < 0 \\ \frac{m-1}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1.$ <p>Kết hợp với điều kiện <math>m &lt; \frac{17}{8} \Rightarrow 1 &lt; m &lt; \frac{17}{8}.</math></p>	<p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p>
<p><b>Câu 3.</b> (3đ)</p>	<p><b>Câu 3:</b> Cho đường tròn <math>(O)</math> có hai đường kính <math>AB</math> và <math>CD</math> vuông góc với nhau. Trên cung nhỏ <math>AC</math> lấy điểm <math>M</math> sao cho <math>AM = AO</math>.</p> <p>a) Chứng minh bốn điểm <math>A; I; M; O</math> cùng thuộc một đường tròn</p>	

b) Chứng minh  $sđ\widehat{MC} = \frac{1}{3}sđ\widehat{BD}$

c) Dây  $MB$  cắt  $CD$  tại  $I$ , đoạn thẳng  $MO$  cắt  $AI$  tại  $H$ . Chứng minh  $AH.AI = MI.MB$

d) Điểm  $I$  nằm trên dây  $PQ$ . Xác định vị trí của dây  $PQ$  để  $\widehat{OQP}$  lớn nhất



0.25đ

a. Ta có:

$\widehat{AMB} = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{AOC} = 90^\circ$  ( $AB \perp CD$ )

$\Rightarrow \widehat{AMB} + \widehat{AOC} = 180^\circ$

Mà trong tứ giác  $AOIM$ ,  $\widehat{AMB}$  và  $\widehat{AOC}$  là hai góc đối

$\Rightarrow AOIM$  là tứ giác nội tiếp một đường tròn

0.25đ

0.25đ

0.25đ

b. Theo GT  $AM = AO$  mà  $AO = OM = R \Rightarrow$  Tam giác  $AOM$  là tam giác đều

$\Rightarrow sđ\widehat{AM} = \widehat{AOM} = 60^\circ \Rightarrow sđ\widehat{MC} = 30^\circ$

Mà  $sđ\widehat{BD} = \widehat{DOB} = 90^\circ$

$\Rightarrow sđ\widehat{MC} = \frac{1}{3}sđ\widehat{BD}$

0,25đ

0,25đ

0,25đ

0,25đ

c. Ta có  $CD$  là trung trực của  $AB$  nên  $IA = IB \Rightarrow$  tam giác  $IAB$  cân tại  $I$

$\Rightarrow \widehat{AIO} = \widehat{OIB} = \frac{1}{2}(sđ\widehat{MC} + sđ\widehat{BD}) = 60^\circ$

Lại có  $\widehat{MIA} + \widehat{AIO} + \widehat{OIB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{MIA} = \widehat{AIO} = \widehat{OIB} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{MAI} = \widehat{OAI}$  (cùng phụ góc  $60^\circ$ )

$\Rightarrow AI$  vừa là đường phân giác vừa là đường trung trực của  $\triangle MAO$

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác  $MAI$  ta có  $AH.AI = AM^2$  (1)

$\triangle AMI \sim \triangle BMA$  (g.g)  $\Rightarrow AM^2 = MI.MB$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow AH.AI = MI.MB$

0.25đ

0.25đ

d. Từ  $O$  dựng  $OK \perp PQ$  ( $K \in PQ$ )

Do  $OPQ$  là tam giác cân tại  $O$  nên  $\widehat{OQP} = \frac{180 - \widehat{POQ}}{2}$  (Tính chất tam giác cân)

	<p><math>\Rightarrow \angle OQP</math> lớn nhất khi <math>\angle POQ</math> nhỏ nhất, mà <math>\angle POQ</math> là góc ở tâm chắn cung <math>PQ</math> nên <math>\angle OQP</math> lớn nhất khi <math>sđ\widehat{PQ}</math> nhỏ nhất hay <math>PQ</math> có độ dài ngắn nhất.</p> <p>Theo quan hệ giữa độ dài dây và khoảng cách từ tâm đến dây thì <math>PQ</math> ngắn nhất khi đoạn thẳng <math>OK</math> có độ dài lớn nhất</p> <p>Áp dụng quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác vào tam giác vuông <math>OIK</math> có <math>OI \geq OK</math> (Cạnh đối diện với góc lớn nhất thì lớn nhất)</p> <p><math>\Rightarrow OK</math> có độ dài lớn nhất khi <math>I</math> trùng <math>K</math></p> <p>Vậy <math>\angle OQP</math> có độ dài lớn nhất khi <math>PQ</math> qua <math>I</math> và vuông góc với <math>CD</math></p>	<p><b>0.25đ</b></p> <p><b>0.25đ</b></p>
<p><b>Câu 4.</b> <b>(0.5 đ)</b></p>	$\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{2024}{xy + yz + xz}$ $= \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{1}{xy + yz + xz} + \frac{1}{xy + yz + xz} + \frac{2022}{xy + yz + xz}$ <p>Ta có:</p> $(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ $= \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \geq 0 \Rightarrow 3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2$ <p>Dấu “=” xảy ra <math>\Leftrightarrow a = b = c</math></p> <p>Với <math>a, b, c &gt; 0</math>, áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:</p> $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} ; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$ $\Rightarrow (a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$ <p>Dấu “=” xảy ra <math>\Leftrightarrow a = b = c</math></p> <p>Với <math>x + y + z \leq 1</math>, áp dụng các kết quả trên, ta có:</p> $\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{1}{xy + yz + xz} + \frac{1}{xy + yz + xz}$ $\geq \frac{9}{x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz)} = \frac{9}{(x + y + z)^2} \geq \frac{9}{1^2} = 9$ $\frac{2022}{xy + yz + xz} = \frac{6066}{3(xy + yz + xz)} \geq \frac{6066}{(x + y + z)^2} \geq \frac{6066}{1^2} = 6066$ $\Rightarrow P \geq 9 + 6066 = 6075$ <p>Dấu “=” xảy ra <math>\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}</math>. Vậy <math>\min P = 6075 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}</math></p>	<p><b>0,25đ</b></p> <p><b>0,25đ</b></p>

**Ghi chú:** Nếu học sinh giải theo cách khác đúng thì cho điểm tối đa.