

Bài 1. (1,5 điểm) Cho Parabol (P): $y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng (d): $y = \frac{1}{2}x + 1$

- a) Vẽ đồ thị (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.
 b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Bài 2. (0,75 điểm) Cho phương trình $2x^2 + 3x - 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $A = \frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_1 - 1}$.

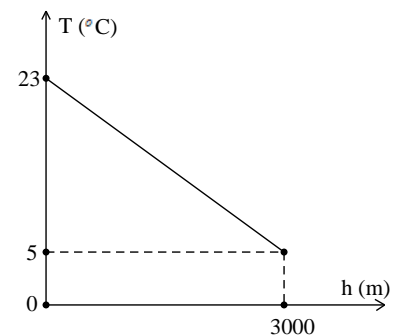
Bài 3. (0,75 điểm) Trong cuộc thi Olympic Toán học. Nhóm học sinh trường THCS A đã trả lời 20 câu hỏi và kết quả mà nhóm đạt được là 28 điểm. Tính số câu trả lời đúng và sai của nhóm ? Biết rằng mỗi câu trả lời đúng được 2 điểm, mỗi câu trả lời sai bị trừ 1 điểm.

Bài 4. (0,75 điểm) Một công ty sản xuất đồ gia dụng trả lương cho công nhân như sau: làm đủ số ngày trong tháng theo quy định được trả mức lương cơ bản 6 000 000 đồng/ tháng. Nếu làm tăng ca thì được trả thêm 40 000 cho 1 giờ tăng ca.

- a) Anh An là công nhân của công ty, tháng 10 anh làm tăng ca 12 ngày và mỗi ngày tăng ca 4 giờ. Tính tổng số tiền anh An nhận được trong tháng 10.
 b) Anh Bình là công nhân của công ty, tháng 11 anh nhận được 8 400 000 đồng gồm lương cơ bản và lương tăng ca. Hỏi trong tháng 11 anh Bình làm tăng ca bao nhiêu giờ ?

Bài 5. (0,75 điểm) Một vận động viên leo núi thì nhận thấy rằng càng lên cao nhiệt độ không khí càng giảm. Mối liên hệ giữa nhiệt độ không khí T và độ cao h (so với chân núi) được cho bởi hàm số $T = a.h + b$ có đồ thị như hình vẽ.

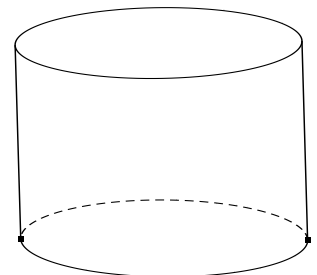
Tại chân núi, người ta đo được nhiệt độ không khí là 23°C và trung bình lên cao 100m thì nhiệt độ không khí giảm $0,6^\circ\text{C}$.



- a) Xác định a và b trong công thức trên.
 b) Tại một đỉnh núi người ta đo nhiệt độ không khí là $15,8^\circ\text{C}$. Hỏi ngọn núi cao bao nhiêu mét (tính từ chân núi đến đỉnh núi) ?

Bài 6. (0,75 điểm) Một bể nước hình trụ, đáy trong của bể là một hình tròn có đường kính 2 m, chiều cao bên trong bể là 1 m. Bể đang chứa đầy nước.

- a) Lượng nước đang chứa trong bể là bao nhiêu m^3 ? Biết công thức tính thể tích khối hình trụ là $V = \pi.R^2.h$ với R là bán kính đường tròn đáy, h là chiều cao hình trụ, lấy $\pi = 3,14$.



b) Dùng một cái thùng hình trụ chiều cao 40 cm , đường kính đáy bằng 20 cm để lấy nước trong bể. Hỏi cần lấy ít nhất bao nhiêu lần để hết lượng nước trong bể.

Bài 7. (1,0 điểm) Theo âm lịch thì do một chu kỳ quay của Mặt Trăng quanh Trái Đất là khoảng $29,53$ ngày nên một năm âm lịch chỉ có khoảng 354 ngày (làm tròn). Do vậy, cứ sau một vài năm âm lịch thì người ta phải bù sung một tháng (tháng nhuận) để đảm bảo năm âm lịch tương đối phù hợp với chu kỳ của thời tiết, là yếu tố phụ thuộc vào chu kỳ quay của Trái Đất xung quanh Mặt Trời.

Cách tính năm nhuận âm lịch như sau: Lấy số năm chia cho 19 , nếu số dư là một trong các số: $0; 3; 6; 9; 11; 14; 17$ thì năm âm lịch đó có tháng nhuận.

a) Em hãy sử dụng quy tắc trên để xác định năm 1995 và 2030 có phải năm nhuận âm lịch hay không?

b) Năm nhuận dương lịch là năm chia hết cho 4 . Ngoài ra, những năm chia hết cho 100 chỉ được coi là năm nhuận dương lịch nếu chúng cũng chia hết cho 400 .

Hỏi từ năm 1895 đến năm 1930 , năm nào vừa là năm nhuận âm lịch và là năm nhuận dương lịch?

Bài 8. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh các tứ giác $BCEF$, $AEHF$ nội tiếp.

b) Đường thẳng EF và BC cắt nhau tại S , AS cắt (O) tại M (M khác A).

Chứng minh $SB \cdot SC = SE \cdot SF = SM \cdot SA$ và HM là đường cao của tam giác AHS .

c) Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh 3 điểm I, H, M thẳng hàng.

Bài 9: (0,75 điểm) Bạn A có một ổ khóa số cho xe đạp như trong hình. Ổ khóa có các số từ 0 đến 9 trên mỗi vòng quay. Khóa sẽ kêu tách nhẹ khi bạn A quay lên hay quay xuống 1 số trên mỗi vòng, kể cả khi quay từ 0 đến 9 hay ngược lại. Khi nhìn vào ổ khóa thì A thấy có các số mỗi vòng đang ở vị trí $9 - 0 - 4$ như hình. Mã khóa A đã cài là $5 - 8 - 7$.

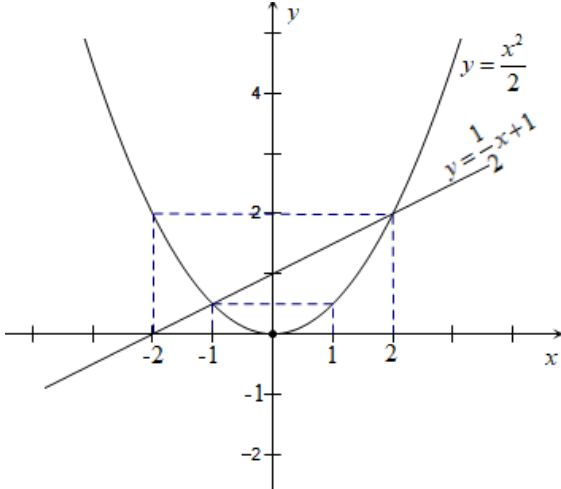


a) Em hãy tính số tiếng tách ít nhất khi A cần để mở được ổ khóa.

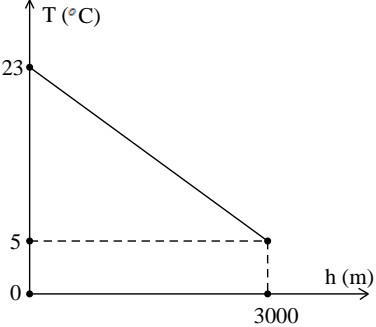
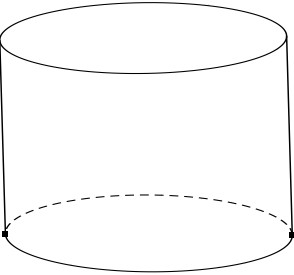
b) Bạn của A cũng đã mở được khóa từ vị trí $9 - 0 - 4$ với số tiếng tách là nhiều nhất.

Tính số tiếng tách trung bình cần để mở được ổ khóa. Xem như nó gần với trung bình cộng của số tiếng ít nhất và nhiều nhất

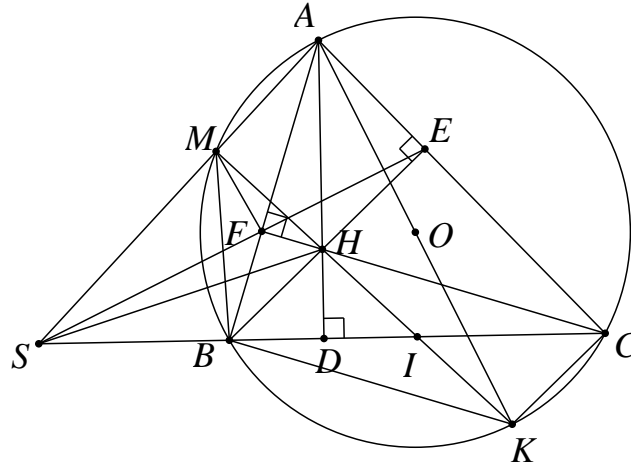
ĐÁP ÁN – HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Đáp án	Điểm																		
1.	<p>Đề bài: Cho Parabol (P): $y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng (d): $y = \frac{1}{2}x + 1$</p> <p>a) Vẽ đồ thị (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ. b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.</p> <p>a) Bảng giá trị</p> <table border="1" data-bbox="240 657 763 789"> <tr> <td>x</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>$y = \frac{x^2}{2}$</td> <td>2</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>0</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>2</td> </tr> </table> <table border="1" data-bbox="240 831 553 953"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>-2</td> </tr> <tr> <td>$y = \frac{1}{2}x + 1$</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </table> 	x	-2	-1	0	1	2	$y = \frac{x^2}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	x	0	-2	$y = \frac{1}{2}x + 1$	1	0	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,5</p>
x	-2	-1	0	1	2															
$y = \frac{x^2}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2															
x	0	-2																		
$y = \frac{1}{2}x + 1$	1	0																		
	<p>Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):</p> $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x - 1 = 0$ <p>Giải phương trình trên ta được 2 nghiệm $x_1 = -1; x_2 = 2$</p> <p>Với $x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$</p> <p>Với $x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = \frac{2^2}{2} = 2$</p> <p>Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ và $(2, 2)$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p>																		

<p>2.</p>	<p>Đề bài: Cho phương trình $2x^2 + 3x - 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $A = \frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_1 - 1}$.</p> <p>Giải:</p> <p>$(a = 2; b = 3; c = -6)$ Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4.2.(-6) = 57 > 0$ Do đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.</p> <p>Hệ thức Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$</p> <p>$A = \frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_1 - 1} = \frac{x_1^2 - x_1 + x_2^2 - x_2}{(x_2 - 1)(x_1 - 1)} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - (x_1 + x_2)}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1}$</p> <p>$A = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2.3 - \left(-\frac{3}{2}\right)}{3 - \left(-\frac{3}{2}\right) + 1} = -\frac{9}{22}$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
<p>3.</p>	<p>Đề bài: Trong cuộc thi Olympic Toán học. Nhóm học sinh trường THCS A đã trả lời 20 câu hỏi và kết quả mà nhóm đạt được là 28 điểm. Tính số câu trả lời đúng và sai của nhóm ? Biết rằng mỗi câu trả lời đúng được 2 điểm, mỗi câu trả lời sai bị trừ 1 điểm.</p> <p>Giải:</p> <p>Gọi x là số câu trả lời đúng, y là số câu trả lời sai ($x, y \in \mathbb{N}^*$ và $x, y < 20$) Tổng số câu trả lời là 20 nên ta có phương trình: $x + y = 20 \quad (1)$</p> <p>Số điểm cho các câu trả lời đúng và sai lần lượt là: $2x$ và $-y$ Vì tổng số điểm đạt được là 28 nên ta có phương trình: $2x - y = 28 \quad (2)$</p> <p>Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 20 \\ 2x - y = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 4 \end{cases}$</p> <p>Vậy nhóm trả lời đúng 16 câu, trả lời sai 4 câu.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
<p>4.</p>	<p>Đề bài: Một công ty sản xuất đồ gia dụng trả lương cho công nhân như sau: làm đủ số ngày trong tháng theo quy định được trả mức lương cơ bản 6 000 000 đồng/ tháng. Nếu làm tăng ca thì được trả thêm 40 000 cho 1 giờ tăng ca.</p> <p>a) Anh An là công nhân của công ty, tháng 10 anh làm tăng ca 12 ngày và mỗi ngày tăng ca 4 giờ. Tính tổng số tiền anh An nhận được trong tháng 10.</p> <p>b) Anh Bình là công nhân của công ty, tháng 11 anh nhận được 8 400 000 đồng gồm lương cơ bản và lương tăng ca. Hỏi trong tháng 11 anh Bình làm tăng ca bao nhiêu giờ ?</p> <p>Giải:</p> <p>a) Số tiền làm tăng ca của anh An là: $4.12.40\ 000 = 1\ 920\ 000$(đồng)</p>	

	<p>Tổng số tiền nhận được của anh An trong tháng 10: $6\,000\,000 + 1\,920\,000 = 7\,920\,000$ (đồng)</p> <p>b) Số tiền làm tăng ca của anh Bình là: $8\,400\,000 - 6\,000\,000 = 2\,400\,000$ (đồng) Số giờ làm tăng ca của anh Bình: $2\,400\,000 : 40\,000 = 60$ (giờ)</p>	<p>0,5</p> <p>0,25</p>
<p>5.</p>	<p>Đề bài: Một vận động viên leo núi thì nhận thấy rằng càng lên cao nhiệt độ không khí càng giảm. Mối liên hệ giữa nhiệt độ không khí T và độ cao h (so với chân núi) được cho bởi hàm số $T = a.h + b$ có đồ thị như hình vẽ.</p> <p>Tại chân núi, người ta đo được nhiệt độ không khí là 23°C và trung bình lên cao 100m thì nhiệt độ không khí giảm $0,6^{\circ}\text{C}$.</p> <p>a) Xác định a và b trong công thức trên.</p> <p>b) Tại một đỉnh núi người ta đo nhiệt độ không khí là $15,8^{\circ}\text{C}$. Hỏi ngọn núi cao bao nhiêu mét (tính từ chân núi đến đỉnh núi) ?</p> <p style="text-align: center;">Giải:</p> <p>Thay $h = 0, T = 23$ vào công thức $T = a.h + b$, ta có: $b = 23$ (1)</p> <p>Thay $h = 3000, T = 5$ vào công thức $T = a.h + b$, ta có: $3000.h + b = 5$ (2)</p> <p>Từ (1) và (2) $\Rightarrow a = -\frac{3}{500}; b = 23$</p> <p>b) Thay $T = 15,8; a = -\frac{3}{500}; b = 23$ vào công thức, ta có:</p> $-\frac{3}{500}.h + 23 = 15,8$ $\Leftrightarrow -\frac{3}{500}.h = -7,2$ $\Leftrightarrow h = 1200$ <p>Vậy ngọn núi cao 1200 mét</p>	 <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
<p>6.</p>	<p>Đề bài: Một bể nước hình trụ, đáy trong của bể là một hình tròn có đường kính 2 m, chiều cao bên trong bể là 1 m. Bể đang chứa đầy nước.</p> <p>a) Lượng nước đang chứa trong bể là bao nhiêu m^3 ? Biết công thức tính thể tích khối hình trụ là $V = \pi.R^2.h$ với R là bán kính đường tròn đáy, h là chiều cao hình trụ, lấy $\pi = 3,14$.</p> <p>b) Dùng một cái thùng hình trụ chiều cao 40 cm, đường kính đáy bằng 20 cm để lấy nước trong bể. Hỏi cần lấy ít nhất bao nhiêu lần để hết lượng nước trong bể.</p>	

	<p style="text-align: center;">Giải</p> <p>a) Thể tích lòng bể nước: $3,14 \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^2 \cdot 1 = 3,14 \text{ (m}^3\text{)}$ Vì bể chứa đầy nước nên lượng nước trong bể là $3,14 \text{ m}^3$.</p> <p>b) Thể tích thùng nước: $3,14 \cdot \left(\frac{20}{2}\right)^2 \cdot 40 = 12560 \text{ (cm}^3\text{)}$ Đổi: $12\,560 \text{ cm}^3 = 0,01256 \text{ m}^3$. Số lần lấy ít nhất để hết lượng nước trong bể là: $3,14 : 0,01256 = 250 \text{ (lần)}$ Vậy cần lấy ít nhất 250 lần để hết lượng nước trong bể.</p>	<p style="text-align: center;">0,25</p> <p style="text-align: center;">0,25</p> <p style="text-align: center;">0,25</p>																		
<p style="text-align: center;">7.</p>	<p>Đề bài: Theo âm lịch thì do một chu kỳ quay của Mặt Trăng quanh Trái Đất là khoảng 29,53 ngày nên một năm âm lịch chỉ có khoảng 354 ngày (làm tròn). Do vậy, cứ sau một vài năm âm lịch thì người ta phải bù sung một tháng (tháng nhuận) để đảm bảo năm âm lịch tương đối phù hợp với chu kỳ của thời tiết, là yếu tố phụ thuộc vào chu kỳ quay của Trái Đất xung quanh Mặt Trời. Cách tính năm nhuận âm lịch như sau: Lấy số năm chia cho 19, nếu số dư là một trong các số: 0; 3; 6; 9; 11; 14; 17 thì năm âm lịch đó có tháng nhuận.</p> <p>a) Em hãy sử dụng quy tắc trên để xác định năm 1995 và 2030 có phải năm nhuận âm lịch hay không? b*) Năm nhuận dương lịch là năm chia hết cho 4. Ngoài ra, những năm chia hết cho 100 chỉ được coi là năm nhuận dương lịch nếu chúng cũng chia hết cho 400. Hỏi từ năm 1895 đến năm 1930, năm nào vừa là năm nhuận âm lịch và là năm nhuận dương lịch?</p> <p style="text-align: center;">Giải</p> <p>a) Ta có: 1995 chia 19 bằng 105, dư 0 nên năm 1995 là năm nhuận âm lịch. 2030 chia 19 bằng 106, dư 16 nên năm 2030 không nhuận âm lịch.</p> <p>b) Từ năm 1895 đến năm 1930, các năm có số chia hết cho 4 là: 1896, 1900, 1904, 1908, 1912, 1916, 1920, 1924, 1928. Vì 1900 không chia hết cho 400 nên năm 1900 không là năm nhuận dương lịch. Các năm nhuận dương lịch là: 1896, 1904, 1908, 1912, 1916, 1920, 1924, 1928. Bảng số dư các năm trên cho 19:</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tbody> <tr> <td>Năm</td> <td>1896</td> <td>1904</td> <td>1908</td> <td>1912</td> <td>1916</td> <td>1920</td> <td>1924</td> <td>1928</td> </tr> <tr> <td>Số dư</td> <td>15</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>12</td> <td>16</td> <td>1</td> <td>5</td> <td>9</td> </tr> </tbody> </table> <p>Dựa vào bảng số dư, ta có năm 1928 là năm nhuận âm lịch. Vậy năm 1928 là năm vừa nhuận dương lịch, vừa nhuận âm lịch.</p>	Năm	1896	1904	1908	1912	1916	1920	1924	1928	Số dư	15	4	8	12	16	1	5	9	<p style="text-align: center;">0,25</p> <p style="text-align: center;">0,25</p> <p style="text-align: center;">0,25</p>
Năm	1896	1904	1908	1912	1916	1920	1924	1928												
Số dư	15	4	8	12	16	1	5	9												
<p style="text-align: center;">8.</p>	<p>Đề bài: Cho tam giác ABC nhọn, $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.</p> <p>a) Chứng minh các tứ giác BCEF, AEHF nội tiếp. b) Đường thẳng EF và BC cắt nhau tại S, AS cắt (O) tại M (M khác A). Chứng minh $SB \cdot SC = SE \cdot SF = SM \cdot SA$ và HM là đường cao của tam giác AHS. c) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh 3 điểm I, H, K thẳng hàng.</p> <p style="text-align: center;">Giải</p>																			



a) Xét tứ giác BCEF có:

$\widehat{BEC} = 90^\circ$ (BE là đường cao của tam giác ABC)

$\widehat{BFC} = 90^\circ$ (CF là đường cao của tam giác ABC)

$\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{BFC}$

0,25

Mà E, F là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn cạnh BC

\Rightarrow Tứ giác BCEF nội tiếp.

0,25

Xét tứ giác AEHF có:

$\widehat{AEH} = \widehat{AEB} = 90^\circ$ (BE là đường cao của tam giác ABC)

$\widehat{AFH} = \widehat{AFC} = 90^\circ$ (CF là đường cao của tam giác ABC)

$\Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

0,25

\Rightarrow Tứ giác AEHF nội tiếp (tứ giác có hai góc đối bù nhau).

0,25

b) Xét $\triangle SFB$ và $\triangle SCE$ có:

\hat{S} chung

$\widehat{SFB} = \widehat{SCE}$ (tứ giác BCEF nội tiếp)

$\Rightarrow \triangle SFB \sim \triangle SCE$

$\Rightarrow \frac{SF}{SC} = \frac{SB}{SE} \Rightarrow SF \cdot SE = SB \cdot SC$ (1)

0,25

Xét $\triangle SMB$ và $\triangle SCA$ có:

\hat{S} chung

$\widehat{SMB} = \widehat{SCA}$ (tứ giác AMBC nội tiếp)

$\Rightarrow \triangle SMB \sim \triangle SCA$

$\Rightarrow \frac{SM}{SC} = \frac{SB}{SA} \Rightarrow SM \cdot SA = SB \cdot SC$ (2)

0,25

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SF \cdot SE = SB \cdot SC = SM \cdot SA$

0,25

Xét $\triangle SAE$ và $\triangle SFM$ có:

Ŝ chung

$$\frac{SA}{SF} = \frac{SE}{SM} \quad (\text{vì } SF \cdot SE = SM \cdot SA)$$

$\Rightarrow \triangle SAE \sim \triangle SFM$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{SAE} = \widehat{SFM}$ (2 góc tương ứng)

$\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{SFM}$

\Rightarrow Tứ giác AMFE nội tiếp (tứ giác có góc đối trong bằng góc ngoài)

Mà tứ giác AEHF nội tiếp (chứng minh câu a)

\Rightarrow 5 điểm A, H, E, F, M cùng thuộc một đường tròn

\Rightarrow Tứ giác AMHE nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{AMH} + \widehat{AEH} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AMH} = 180^\circ - \widehat{AEH} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow MH \perp AM \Rightarrow MH \perp AS$

\Rightarrow MH là đường cao của tam giác AHS.

c) Vẽ đường kính AK của tam giác ABC.

Ta có $\widehat{AMK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow KM \perp AM$

Mà $MH \perp AM$ (chứng minh câu c)

$\Rightarrow K, H, M$ thẳng hàng. (*)

Ta có $\widehat{ABK} = \widehat{ACK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow BK \perp AB, CK \perp AC$

$$\begin{cases} BK \perp AB & (\text{cmt}) \\ CH \perp AB & (CF \perp AB) \end{cases} \Rightarrow BK \parallel CH$$

Chứng minh tương tự ta có $CK \parallel BH$

Xét tứ giác BHCK có: $BK \parallel CH, CK \parallel BH$

\Rightarrow BHCK là hình bình hành.

Mà I là trung điểm của BC (gt)

Nên I là trung điểm của HK.

$\Rightarrow H, I, K$ thẳng hàng. (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow K, I, H, M$ thẳng hàng.

Vậy 3 điểm I, H, M thẳng hàng.

9.

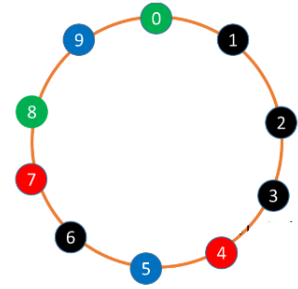
Đề bài: Bạn A có một ổ khóa số cho xe đạp như trong hình. Ổ khóa có các số từ 0 đến 9 trên mỗi vòng quay. Khóa sẽ kêu tách nhẹ khi bạn A quay lên hay quay xuống 1 số trên mỗi vòng, kể cả khi quay từ 0 đến 9 hay ngược lại. Khi nhìn vào ổ khóa thì A thấy có các số mỗi vòng đang ở vị trí 9 – 0 – 4 như hình. Mã khóa A đã cài là 5–8–7.



a) Em hãy tính số tiếng tách ít nhất khi A cần để mở được ổ khóa.

b) Bạn của A cũng đã mở được khóa từ vị trí 9 – 0 – 4 với số tiếng tách là nhiều nhất. Tính số tiếng tách trung bình cần để mở được ổ khóa. Xem như nó gần với trung bình cộng của số tiếng ít nhất và nhiều nhất

a) Từ số 9 để quay đến số 5 cách đi ít nhất có 4 tiếng tách
 Từ số 0 để quay đến số 8 cách đi ít nhất có 2 tiếng tách
 Từ số 4 để quay đến số 7 cách đi ít nhất $4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ có 3 tiếng tách
 Cần ít nhất $2+3+4=9$ tiếng tách



0,25
0,25

b) Từ số 9 để quay đến số 5 cách đi nhiều nhất có 6 tiếng tách
 Từ số 0 để quay đến số 8 cách đi nhiều nhất có 8 tiếng tách
 Từ số 4 để quay đến số 7 cách đi nhiều nhất có 7 tiếng tách
 Bạn của A mở khóa với $6+7+8=21$ tiếng tách
 số tiếng tách trung bình là $(21+9)/2=15$ tiếng

0,25