

Đề chính thức

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)  
Ngày thi: 18/5/2023

**Câu 1 (2,0 điểm)**

- Giải phương trình:  $x^2 - x - 20 = 0$
- Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ \frac{x+6}{4} - \frac{y}{6} = 1 \end{cases}$$

**Câu 2 (2,0 điểm)**

1) Rút gọn biểu thức

$$A = 1 - \frac{3}{\sqrt{x} + 3} : \left( \frac{x - 2\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} - 6} - \frac{x - 9}{x + 6\sqrt{x} + 9} \right) \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 4.$$

2) Cho hàm số bậc nhất  $y = (a - 2)x - 2a + 3$  có đồ thị là đường thẳng (d). Xác định giá trị của a để đường thẳng (d) cắt đường thẳng (d'):  $y = 2x + 1$  tại điểm cách trục tung 2 đơn vị.

**Câu 3 (2,0 điểm)**

a) Một học sinh được giao phải làm 120 bài tập trong thời gian nhất định, chia đều cho các ngày. Sau khi làm được 5 ngày theo đúng kế hoạch, học sinh đó nghỉ một ngày. Để hoàn thành đúng thời gian đã định, mỗi ngày còn lại học sinh đó phải làm tăng thêm 3 bài tập so với kế hoạch ban đầu. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày học sinh đó làm bao nhiêu bài tập.

b) Tìm m để phương trình bậc hai  $4x^2 - 17x + m - 1 = 0$  có hai nghiệm dương phân biệt thỏa mãn  $\sqrt{x_1} - 2\sqrt{x_2} = 1$

**Câu 4 (3,0 điểm)**

Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Vẽ đường tròn tâm O đường kính BC. Kẻ tiếp tuyến AM với đường tròn. Gọi H là hình chiếu của M trên AC. Tia MH cắt đường tròn tại điểm thứ hai là N.

- Chứng minh: OA là phân giác góc MON và AN là tiếp tuyến của (O).
- Lấy điểm E thuộc cung nhỏ MN sao cho  $EM < EN$ . Đường thẳng AE cắt đường tròn tại điểm F (F không trùng với E). Gọi I là trung điểm EF, K là giao điểm của EF với MN. Chứng minh:  $AK \cdot AI = AE \cdot AF$
- Đường thẳng qua E song song với AN cắt MN tại P, FP cắt AN tại Q. Chứng minh Q là trung điểm của AN.

**Câu 5 (1,0 điểm)**

Cho x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng  $S = \sqrt{\frac{x}{2y + 2z - x}} + \sqrt{\frac{y}{2z + 2x - y}} + \sqrt{\frac{z}{2x + 2y - z}}$ .

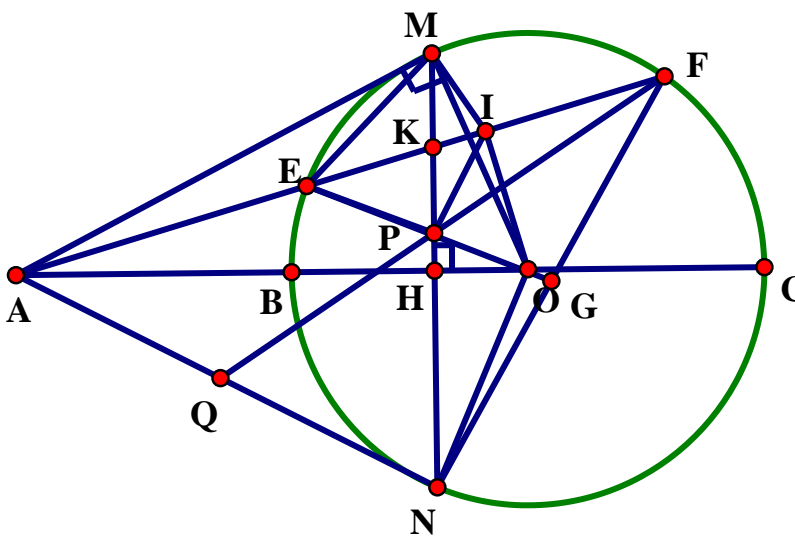
..... Hết .....

Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa

Câu	Đáp án	Điểm
<b>1</b> <b>(2,0</b> <b>điểm)</b>	<i>a) (1 điểm)</i>	
	$x^2 - x - 20 = 0$ $\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-20) = 81 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$	0,5
	$\Rightarrow x_1 = \frac{1+9}{2} = 5; x_2 = \frac{1-9}{2} = -4$	0,25
	Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 5; x_2 = -4$	0,25
	<i>b) (1 điểm)</i>	
	$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ \frac{x+6}{4} - \frac{y}{6} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -2 \\ 3(x+6) - 2y = 12 \end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -2 \\ 3x - 2y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -4 \\ 3x - 2y = -6 \end{cases}$	0,25	
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 3x - 2y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$	0,25	
Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 6)$	0,25	
<b>2</b> <b>(2,0</b> <b>điểm)</b>	<i>a) (1 điểm)</i>	
	$A = 1 - \frac{3}{\sqrt{x} + 3} : \left( \frac{x - 2\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} - 6} - \frac{x - 9}{x + 6\sqrt{x} + 9} \right)$	0,25
	$= 1 - \frac{3}{\sqrt{x} + 3} : \left( \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2)} - \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} + 3)^2} \right)$	
	$= 1 - \frac{3}{\sqrt{x} + 3} : \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3} \right)$	0,25
	$= 1 - \frac{3}{\sqrt{x} + 3} : \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$	
	$= 1 - \frac{3}{\sqrt{x} + 3} : \frac{3}{\sqrt{x} + 3}$	0,25
	$= 1 - 1 = 0$ Vậy $A = 0$ , với $x > 0$ và $x \neq 4$	0,25
<i>b) (1 điểm)</i>		
Xét (d): $y = (a - 2)x - a + 3$ (d'): $y = 2x + 1$		
ĐK (d) là hàm số bậc nhất thì $a - 2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2$ ĐK để (d) cắt (d') thì $a - 2 \neq 2 \Leftrightarrow a \neq 4$	0,25	

	<p>d cắt đường thẳng <math>d'</math>: <math>y = 2x + 1</math> tại điểm cách trục tung 2 đơn vị.</p> <p><math>\Rightarrow x = 2</math> hoặc <math>x = -2</math></p> <p>TH 1: <math>x = 2</math>, thay vào công thức của <math>(d')</math> có: <math>y = 2.2 + 1 = 5</math></p> <p>Thay <math>x = 2</math>; <math>y = 5</math> vào công thức của <math>(d)</math> có:</p> $(a - 2). 2 - a + 3 = 5 \Leftrightarrow 2a - 4 - a + 3 = 5$ $\Leftrightarrow a - 1 = 5 \Leftrightarrow a = 6 \text{ (t/m)}$	0,25
	<p>TH 2: <math>x = -2</math>, thay vào công thức của <math>(d')</math> có: <math>y = 2.(-2) + 1 = -3</math></p> <p>Thay <math>x = -2</math>; <math>y = -3</math> vào công thức của <math>d</math> có:</p> $(a - 2). (-2) - a + 3 = -3$ $\Leftrightarrow -2a + 4 - a + 3 = -3$ $\Leftrightarrow -3a = -10 \Leftrightarrow a = -10/3 \text{ (/tm)}$	0,25
	Vậy $a = 6$ , $a = -10/3$ là các giá trị cần tìm.	0,25
<b>3</b> <b>(2,0</b> <b>điểm)</b>	<i>a) (1 điểm)</i>	
	<p>Gọi số bài tập mỗi ngày học sinh đó dự định làm là <math>x</math> (bài)</p> <p><math>(x \in \mathbb{N}^*)</math></p> <p>Thời gian dự định làm hết 120 bài tập là: <math>\frac{120}{x}</math> (ngày)</p> <p>Sau 5 ngày đầu tiên đã làm hết số bài là: <math>5x</math> (bài)</p> <p>Số bài còn lại là: <math>120 - 5x</math> (bài)</p> <p>Mỗi ngày còn lại làm số bài là: <math>x + 3</math> (bài)</p> <p>Thời gian làm số bài còn lại là: <math>\frac{120 - 5x}{x + 3}</math> (ngày)</p>	0,25
	<p>Vì học sinh đó hoàn thành bài theo đúng kế hoạch đặt ra nên có pt:</p> $5 + 1 + \frac{120 - 5x}{x + 3} = \frac{120}{x}$ $\Leftrightarrow 6x(x + 3) + (120 - 5x)x = 120(x + 3)$ $\Leftrightarrow 6x^2 + 18x + 120x - 5x^2 - 120x - 360 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 + 18x - 360 = 0$ <p>Giải pt ta được <math>x = -30</math>(loại) hoặc <math>x = 12</math>(t/m).</p>	0,25
	Vậy theo kế hoạch mỗi ngày học sinh đó làm 12 bài tập	0,25
	<i>b) (1 điểm)</i>	
	<p>Phương trình bậc hai <math>4x^2 - 17x + m - 1 = 0</math> có :</p> $\Delta = (-17)^2 - 4.4.(m - 1) = 305 - 16m$ <p>*) Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì <math>\Delta &gt; 0</math></p> $\Rightarrow 305 - 16m > 0 \Leftrightarrow -16m > -305 \Leftrightarrow m < \frac{305}{16}$	0,25



	$\Rightarrow \Delta MOA = \Delta NOA(\text{c.g.c}) \Rightarrow OMA = ONA$ (hai góc tương ứng) Có $OMA = 90^\circ$ (gt) $\Rightarrow ONA = 90^\circ \Rightarrow AN \perp ON$ tại $N \in (O)$ $\Rightarrow AN$ là tiếp tuyến của $(O)$	
	b) (1,0 điểm)	
	Có $I$ là trung điểm $EF \Rightarrow OI \perp EF$ (quan hệ đường kính và dây) Có $OIA = 90^\circ$ (cmt) Xét $\Delta AKH$ và $\Delta AOI$ có $HAK$ chung; $AHK = AIO = 90^\circ$ $\Rightarrow \Delta AKH \sim \Delta AOI$ (g.g) $\Rightarrow AK.AI = AH.AO$ (1)	0,25
	$\Delta AMO$ vuông tại $M$ có $MH$ là đường cao $\Rightarrow AH.AO = AM^2$ (hệ thức lượng) (2)	0,25
	C/m $\Delta AME \sim \Delta AFM$ vì $MAE$ chung; $AME = AFM$ (cùng chắn $ME$ ) $AM^2 = AE.AF$ (3)	0,25
	Từ (1), (2) và (3) ta có: $AK.AI = AE.AF$	0,25
	c) (1,0 điểm)	
	 <p>Gọi <math>G</math> là giao điểm của <math>EP</math> và <math>NF</math></p> <p>+) Có <math>EP \parallel AN \Rightarrow FEP = FAN</math> (đồng vị) mà <math>FAN = IMN</math> (2 góc nội tiếp cùng chắn cung <math>NI</math> của đường tròn đường kính <math>AO</math>)  <math>\Rightarrow \angle IEP = \angle IMP</math> Mà 2 đỉnh <math>E</math> và <math>M</math> là 2 đỉnh liên tiếp.  <math>\Rightarrow</math> Tứ giác <math>MEPI</math> nội tiếp.</p>	0,25
	$\Rightarrow EMP = EIP$ (cùng nhìn cạnh $EP$ ) Có: $EMP = EFN$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung $EN$ ) $\Rightarrow EIP = EFN$ suy ra $IP \parallel FN$ hay $IP \parallel FG$ Có $I$ là trung điểm $EF \Rightarrow P$ là trung điểm $EG \Rightarrow PE = PG$ (3)	0,25

	Ta có $EG \parallel AN$ (gt) $\Rightarrow \frac{EP}{AQ} = \frac{FP}{FQ} = \frac{PG}{QN}$ (Ta lét) (4)	0,25
	Từ (3) và (4) ta có $AQ = QN$ Suy ra Q là trung điểm của AN.	0,25
<b>5 (1,0 điểm)</b>	Vì x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác $\Rightarrow x, y, z > 0$ và $2y + 2z - x > 0$ ; $2z + 2x - y > 0$ ; $2x + 2y - z > 0$	0,25
	Ta có: $S = \sqrt{\frac{x}{2y + 2z - x}} + \sqrt{\frac{y}{2z + 2x - y}} + \sqrt{\frac{z}{2x + 2y - z}}$  $= \sqrt{\frac{3x^2}{3x(2y + 2z - x)}} + \sqrt{\frac{3y^2}{3y(2z + 2x - y)}} + \sqrt{\frac{3z^2}{3z(2x + 2y - z)}}$  $= \sqrt{3} \left( \frac{x}{\sqrt{3x(2y + 2z - x)}} + \frac{y}{\sqrt{3y(2z + 2x - y)}} + \frac{z}{\sqrt{3z(2x + 2y - z)}} \right)$	0,25
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\sqrt{3x(2y + 2z - x)} \leq x + y + z$ $\sqrt{3y(2z + 2x - y)} \leq x + y + z$ ; $\sqrt{3z(2x + 2y - z)} \leq x + y + z$ Suy ra $S \geq \sqrt{3} \left( \frac{x + y + z}{x + y + z} \right) = \sqrt{3}$ .	0,25
	Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 2y + 2z - x = 3x \\ 2z + 2x - y = 3y \\ 2x + 2y - z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$	0,25
	Vậy $\text{Min}S = \sqrt{3}$ khi đó tam giác đã cho là tam giác đều.	