

Câu I. (2,0 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}}$, với $0 < x \neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức A .
2. Tính giá trị của biểu thức $B = A(\sqrt{2023} + 2)$ khi $x = 2024 - 2\sqrt{2023}$.

Câu II. (2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường thẳng $(d): y = ax + b$ đi qua điểm $M(1;2)$ và song song với đường thẳng $(d'): y = 2x + 3$. Tìm các hệ số a và b .

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 3 \\ \frac{9}{x} - \frac{10}{y} = 1 \end{cases}.$$

Câu III. (2,0 điểm) Cho phương trình bậc hai $x^2 - 3x + m^2 = 0$, với m là tham số.

1. Giải phương trình khi $m = \sqrt{2}$.
2. Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện

$$|x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2 - m^2 - 2m - 1| > 6 - m^2.$$

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Hai đường cao của tam giác đó là AD, BE cắt nhau tại H với $D \in BC, E \in AC$.

1. Chứng minh $CDHE$ là tứ giác nội tiếp một đường tròn, tìm vị trí tâm I của đường tròn đó.
2. Chứng minh $HA.HD = HB.HE$.
3. Chứng minh IE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE (với I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDHE$).

Câu V. (1,0 điểm) Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P = \frac{a}{bc} + \frac{2b}{ca} + \frac{5c}{ab}$.

..... Hết

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Chữ ký giám thị 1:..... Chữ ký giám thị 2:.....

Câu I. (2,0 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}}$, với $0 < x \neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức A .

2. Tính giá trị của biểu thức $B = A(\sqrt{2023} + 2)$ khi $x = 2024 - 2\sqrt{2023}$.

Giải.

1. (1,0 điểm) Khi $0 < x \neq 1$ ta có $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x-2\sqrt{x}+1)}$ (0,5 điểm)

$$= \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(x-2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-1. \text{ Vậy } A = \sqrt{x}-1 \quad (0,5 \text{ điểm})$$

2. (1,0 điểm) Theo ý 1 thì $A = \sqrt{x}-1$. Khi $x = 2024 - 2\sqrt{2023}$ ta có

$$A = \sqrt{2024 - 2\sqrt{2023}} - 1 = \sqrt{(\sqrt{2023}-1)^2} - 1 = \sqrt{2023} - 2 \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$\text{từ đó suy ra } B = (\sqrt{2023}-2)(\sqrt{2023}+2) = 2019 \quad (0,5 \text{ điểm})$$

Câu II. (2,0 điểm)

1. (1,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường thẳng $(d): y = ax + b$ đi qua điểm $M(1;2)$ và song song với đường thẳng $(d'): y = 2x + 3$. Tìm các hệ số a và b .

Giải.

Đường thẳng $(d): y = ax + b$ song song với đường thẳng $(d'): y = 2x + 3$ nên $a = 2$ và $b \neq 3$.

(0,5 điểm)

Vì đường thẳng $(d): y = ax + b$ đi qua điểm $M(1;2)$ nên ta có $2 = 2.1 + b \Leftrightarrow b = 0$

(thỏa mãn vì $b \neq 3$). Vậy $a = 2, b = 0$ là các giá trị cần tìm.

(0,5 điểm)

2. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 3 \\ \frac{9}{x} - \frac{10}{y} = 1 \end{cases}.$$

Giải. Đặt ẩn phụ $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$.

$$\text{Hệ phương trình trở thành } \begin{cases} 6u + 5v = 3 \\ 9u - 10v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12u + 10v = 6 \\ 9u - 10v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{3} \\ v = \frac{1}{5} \end{cases}. \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$\text{Thay ngược trở lại ta được } \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (3; 5)$.

(0,5 điểm)

Câu III. (2,0 điểm) Cho phương trình bậc hai $x^2 - 3x + m^2 = 0$, với m là tham số.

1. Giải phương trình khi $m = \sqrt{2}$.

2. Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện

$$|x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2 - m^2 - 2m - 1| > 6 - m^2.$$

Giải.

1. (1,0 điểm) Khi $m = \sqrt{2}$ ta có phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$. (0,5 điểm)

Do $a + b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = 2$. (0,5 điểm)

2. (1,0 điểm) Phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 9 - 4m^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow m^2 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{3}{2} \quad (*) \quad (0,25 \text{ điểm})$$

Khi đó theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1x_2 = m^2 \end{cases}$.

Vì x_1 là nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + m^2 = 0$ nên ta có $x_1^2 - 3x_1 + m^2 = 0 \Rightarrow x_1^2 = 3x_1 - m^2$

Khi đó với $-\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$ thì

$$|x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2 - m^2 - 2m - 1| > 6 - m^2 \Leftrightarrow |3x_1 - m^2 + x_1x_2 + 3x_2 - m^2 - 2m - 1| > 6 - m^2$$

$$|3(x_1 + x_2) + x_1x_2 - 2m^2 - 2m - 1| > 6 - m^2 \Leftrightarrow |9 + m^2 - 2m^2 - 2m - 1| > 6 - m^2$$

$$|-m^2 - 2m + 8| > 6 - m^2 \Leftrightarrow |(m + 4)(2 - m)| > 6 - m^2 \quad (0,25 \text{ điểm})$$

$$\Leftrightarrow |(m + 4)|(2 - m)| > 6 - m^2 \Leftrightarrow (m + 4)(2 - m) > 6 - m^2$$

$$\Leftrightarrow -m^2 - 2m + 8 > 6 - m^2 \Leftrightarrow m < 1 \quad (0,25 \text{ điểm})$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện } (*) \text{ ta có } -\frac{3}{2} \leq m < 1. \quad (0,25 \text{ điểm})$$

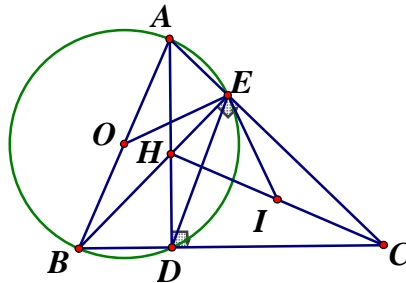
Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Hai đường cao của tam giác đó là AD, BE cắt nhau tại H với $D \in BC, E \in AC$.

1. Chứng minh $CDHE$ là tứ giác nội tiếp một đường tròn, tìm vị trí tâm I của đường tròn đó.

2. Chứng minh $HA \cdot HD = HB \cdot HE$;

3. Chứng minh IE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE (với I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDHE$).

Giải.



1. (1,0 điểm) Chứng minh tứ giác $CDHE$ nội tiếp

$$\text{Ta có: } AD, BE \text{ là hai đường cao của } \Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} AD \perp BC \\ BE \perp AC \end{cases} \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{BEC} = 90^\circ \quad (0,5 \text{ điểm})$$

Xét tứ giác $CDHE$ ta có $\widehat{HDC} + \widehat{HEC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow CDHE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính HC . (0,25 điểm)

Như vậy tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDHE$ là trung điểm của HC . (0,25 điểm)

2. (1,0 điểm) Chứng minh $HA.HD = HB.HE$

Xét $\triangle AHE$ và $\triangle BHD$ ta có:

$\widehat{AHE} = \widehat{BHD}$ (đối đỉnh); $\widehat{AEH} = \widehat{BDH} = 90^\circ$ nên $\triangle AHE$ đồng dạng với $\triangle BHD$ (0,5 điểm)

$$\Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{HE}{HD} \Rightarrow HA.HD = HB.HE \text{ (ĐPCM)} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

3. (1,0 điểm) Xét tứ giác $ABDE$ ta có $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$, mà hai đỉnh D, E là hai đỉnh liên tiếp của tứ giác nên $ABDE$ là tứ giác nội tiếp. Lại có $\triangle AEB$ vuông tại E nên A, B, D, E cùng thuộc đường tròn tâm O đường kính AB và cũng là đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE . (0,25 điểm)

Ta có $ABDE$ là tứ giác nội tiếp suy ra $\widehat{EDC} = \widehat{BAE}$ (1)

$\triangle ECH$ vuông tại E có đường trung tuyến $EI \Rightarrow EI = HI = \frac{1}{2}HC$

$\Rightarrow \triangle HEI$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IEH} = \widehat{IHE}$ hay $\widehat{IEH} = \widehat{EHC}$ (2) (0,25 điểm)

Tứ giác $CDHE$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CHE}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{EDC} = \widehat{BAE} = \widehat{HEI}$;

$\triangle BOE$ cân tại O ($OB = OE$) $\Rightarrow \widehat{OEB} = \widehat{OBE}$ (0,25 điểm)

Hay $\widehat{BAE} = \widehat{OEA}$ mà $\widehat{OBE} + \widehat{BAE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OEB} + \widehat{HEI} = 90^\circ \Rightarrow OE \perp EI$

$\Rightarrow EI$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE (ĐPCM). (0,25 điểm)

Câu V. (1,0 điểm) Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{bc} + \frac{2b}{ca} + \frac{5c}{ab}.$$

Giải. Đặt $\frac{bc}{a} = \frac{3}{x}, \frac{ca}{b} = \frac{3}{y}, \frac{ab}{c} = \frac{3}{z}$ khi đó $x, y, z > 0; 9\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) = a^2 + b^2 + c^2 = 9$

$$\Rightarrow x + y + z = xyz \Rightarrow z = \frac{x+y}{xy-1} \quad (0,25 \text{ điểm})$$

$$P = \frac{1}{3}(x + 2y + 5z) \Rightarrow 3P = x + 2y + 5z = x + 2y + \frac{5(x+y)}{xy-1}$$

$$= x + \frac{2}{x} + \frac{5}{x} + \left(2y - \frac{2}{x}\right) + \left(\frac{5(x+y)}{xy-1} - \frac{5}{x}\right) = x + \frac{7}{x} + \frac{2(xy-1)}{x} + \frac{5(x^2+1)}{x(xy-1)} \quad (0,25 \text{ điểm})$$

Theo bất đẳng thức Cô-si cho hai số ta có:

$$3P \geq x + \frac{7}{x} + 2\sqrt{\frac{2(xy-1)}{x} \cdot \frac{5(x^2+1)}{x(xy-1)}} = x + \frac{7}{x} + 2\sqrt{10\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = x + \frac{7}{x} + 2\sqrt{(3^2+1^2) \cdot \left(1^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right)}$$

Áp dụng bất đẳng thức $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$ và bất đẳng thức Cô-si cho hai số ta có:

$$3P \geq x + \frac{7}{x} + 2\left(3 + \frac{1}{x}\right) = x + \frac{9}{x} + 6 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} + 6 = 12 \Rightarrow P \geq 4. \quad (0,25 \text{ điểm})$$

Khi $x = 3, y = 2, z = 1$ tức là $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}, b = \sqrt{3}, c = \frac{\sqrt{6}}{2}$ thì $P = 4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4. (0,25 điểm)

..... Hết