

Câu I: (2,5 điểm)

1. Thực hiện phép tính:

a) $\sqrt[3]{2-10} - \sqrt{36+64}$

b) $\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2} + \sqrt[3]{(\sqrt{2}-5)^3}$

2. Cho biểu thức: $P = \frac{2a^2 + 4}{1 - a^3} - \frac{1}{1 + \sqrt{a}} - \frac{1}{1 - \sqrt{a}}$

a) Tìm điều kiện của a để P xác định

b) Rút gọn biểu thức P.

Câu II: (1,5 điểm)1. Cho hai hàm số bậc nhất $y = -x + 2$ và $y = (m+3)x + 4$. Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số đã cho là:

a) Hai đường thẳng cắt nhau

b) Hai đường thẳng song song.

2. Tìm các giá trị của a để đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $M(-1; 2)$.**Câu III: (1,5 điểm)**1. Giải phương trình $x^2 - 7x - 8 = 0$ 2. Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ với m là tham số. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = -6$ **Câu IV: (1,5 điểm)**1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$ 2. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = m - 1 \\ 3x + y = 4m + 1 \end{cases}$ có nghiệm (x; y) thỏa mãn điều kiện $x + y > 1$.**Câu V: (3,0 điểm)** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ và tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E; MB cắt nửa đường tròn (O) tại D (D khác B).

a) Chứng minh AMOC là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh AMDE là tứ giác nội tiếp đường tròn.

c) Chứng minh $\widehat{ADE} = \widehat{ACO}$

----- Hết -----

Giải

Câu I: (2,5 điểm)

1. Thực hiện phép tính:

$$a) \sqrt[3]{2-10} - \sqrt{36+64} = \sqrt[3]{-8} - \sqrt{100} = -2 - 10 = -12$$

$$b) \sqrt{(\sqrt{2}-3)^2} + \sqrt[3]{(\sqrt{2}-5)^3} = |\sqrt{2}-3| + \sqrt{2}-5 = 3-\sqrt{2} + \sqrt{2}-5 = -2$$

2. Cho biểu thức: $P = \frac{2a^2+4}{1-a^3} - \frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{1}{1-\sqrt{a}}$

a) Tìm điều kiện của a để P xác định: P xác định khi $a \geq 0$ và $a \neq 1$

b) Rút gọn biểu thức P.

$$P = \frac{2a^2+4}{1-a^3} - \frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{1}{1-\sqrt{a}} = \frac{2a^2+4 - (1-\sqrt{a})(a^2+a+1) - (1+\sqrt{a})(a^2+a+1)}{(1-a)(a^2+a+1)}$$

$$= \frac{2a^2+4 - a^2 - a - 1 + a^2\sqrt{a} + a\sqrt{a} + \sqrt{a} - a - 1 - a^2\sqrt{a} - a\sqrt{a} - \sqrt{a}}{(1-a)(a^2+a+1)}$$

$$= \frac{2-2a}{(1-a)(a^2+a+1)} = \frac{2}{a^2+a+1}$$

Vậy với $a \geq 0$ và $a \neq 1$ thì $P = \frac{2}{a^2+a+1}$

Câu II: (1,5 điểm)

1. Cho hai hàm số bậc nhất $y = -x + 2$ và $y = (m+3)x + 4$. Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số đã cho là:

a) Để hàm số $y = (m+3)x + 4$ là hàm số bậc nhất thì $m+3 \neq 0$ suy ra $m \neq -3$.

Đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng cắt nhau $\Leftrightarrow a \neq a'$

$$\Leftrightarrow -1 \neq m+3 \Leftrightarrow m \neq -4$$

Vậy với $m \neq -3$ và $m \neq -4$ thì đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng cắt nhau.

b) Đồ thị của hàm số đã cho là Hai đường thẳng song song

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = m+3 \\ 2 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4 \text{ thỏa mãn điều kiện } m \neq -3$$

Vậy với $m = -4$ thì đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng song song.

2. Tìm các giá trị của a để đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $M(-1; 2)$.

Vì đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $M(-1; 2)$ nên ta thay $x = -1$ và $y = 2$ vào hàm số ta có phương trình $2 = a \cdot (-1)^2$ suy ra $a = 2$ (thỏa mãn điều kiện $a \neq 0$)

Vậy với $a = 2$ thì đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $M(-1; 2)$.

Câu III: (1,5 điểm)

1. Giải phương trình $x^2 - 7x - 8 = 0$ có $a - b + c = 1 + 7 - 8 = 0$ suy ra $x_1 = -1$ và $x_2 = 8$

2. Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ với m là tham số. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = -6$.

Để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 4$

Theo Viet ta có: $x_1 + x_2 = 2$ (1) và $x_1 \cdot x_2 = m - 3$ (2)

Theo đầu bài: $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = -6 \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 6$ (3)

Thế (1) và (2) vào (3) ta có: $(m - 3)(2)^2 - 2(m - 3) = 6 \Leftrightarrow 2m = 12 \Leftrightarrow m = 6$ Không thỏa mãn điều kiện $m \leq 4$ vậy không có giá trị nào của m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = -6$.

Câu IV: (1,5 điểm)

1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(3y - 2) - 2y = 1 \\ x = 3y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y = 7 \\ x = 3y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

2. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = m - 1 \\ 3x + y = 4m + 1 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện

$x + y > 1$.

$$\begin{cases} 2x - y = m - 1 \\ 3x + y = 4m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5m \\ 2x - y = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ 2m - y = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ y = m + 1 \end{cases}$$

Mà $x + y > 1$ suy ra $m + m + 1 > 1 \Leftrightarrow 2m > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Vậy với $m > 0$ thì hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $x + y > 1$.

Câu V: (3,0 điểm) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ và tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E; MB cắt nửa đường tròn (O) tại D (D khác B).

a) Chứng minh AMCO là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh AMDE là tứ giác nội tiếp đường tròn.

c) Chứng minh $\widehat{ADE} = \widehat{ACO}$

Giải.

a) $\widehat{MAO} = \widehat{MCO} = 90^\circ$ nên tứ giác AMCO nội tiếp

b) $\widehat{MEA} = \widehat{MDA} = 90^\circ$. Tứ giác AMDE có

D, E cùng nhìn AM dưới cùng một góc 90°

Nên AMDE nội tiếp

c) Vì AMDE nội tiếp nên $\widehat{ADE} = \widehat{AME}$ cùng chắn cung AE

Vì AMCO nội tiếp nên $\widehat{ACO} = \widehat{AME}$ cùng chắn cung AO

Suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{ACO}$

