

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

Mã đề
101

Họ và tên thí sinh: SBD:

Câu 1. Nếu $\int_1^2 f(x)dx = -4$, $\int_1^3 f(x)dx = 5$ thì $\int_2^3 f(x)dx$ bằng

- A. 1. B. -1. C. -9. D. 9.

Câu 2. Modul số phức $z = 3 - 2i$ bằng

- A. 5. B. 1. C. $\sqrt{13}$. D. 13.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$?

- A. $-x + 2y - 3z + 1 = 0$. B. $x - 2y - 3z + 2 = 0$. C. $x - 2z + 3 = 0$. D. $x - 2y + 3 = 0$.

Câu 4. Mặt phẳng $(P): 3x + 5y - z - 2 = 0$ cắt trục Oz tại điểm có tọa độ.

- A. $(0; 0; -2)$. B. $(3; 5; -1)$ C. $(3; 5; 0)$. D. $(0; 0; 2)$.

Câu 5. Trong mặt phẳng phức, cho số phức $z = 3 - 2i$. Điểm biểu diễn cho số phức $\bar{z}$ là điểm nào sau đây?

- A. $M(-3; -2)$. B. $Q(3; 2)$. C. $N(-2; 3)$. D. $P(2; -3)$.

Câu 6. Cho khối lăng trụ có thể tích $V = 12a^3$ và diện tích đáy $B = 6a^2$. Tính chiều cao h của khối lăng trụ đó

- A. $h = 3a$. B. $h = 2a$. C. $h = 6a$. D. $h = 4a$.

Câu 7. Biết rằng phương trình $\log_3(x - 3) = 2$ có một nghiệm là x_0 . Giá trị x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(2; 5)$. B. $(11; 14)$. C. $(12; +\infty)$. D. $(4; 12)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	2

Hỏi bảng biến thiên đó là của hàm số nào trong các hàm số sau

- A. $y = \frac{2x-1}{x-1}$. B. $y = \frac{2x+3}{x+1}$. C. $y = \frac{2x-1}{x+1}$. D. $y = \frac{2x}{x-1}$.

Câu 9. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = x^3 - 6x + 1$. B. $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 2$. C. $y = x^4 + 2x^2$. D. $y = \frac{2x-1}{x+5}$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}(-3;0;1)$ và $\vec{b}(-1;5;m)$. Tìm m để $\vec{a} \perp \vec{b}$

- A. $m = -8$. B. $m = 3$. C. $m = -3$. D. $m = 8$.

Câu 11. Cho n điểm phân biệt trên mặt phẳng ($n \in \mathbb{N}, n > 2$). Số vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong n điểm đã cho bằng:

- A. $2n$. B. P_n . C. A_n^2 . D. C_n^2 .

Câu 12. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 8$ là

- A. $[-3; +\infty)$. B. $[3; +\infty)$. C. $(-\infty; 3]$. D. $(-\infty; -3]$.

Câu 13. Với mọi số thực a dương, $\log_3 \frac{a^3}{27}$ bằng

- A. $\frac{1}{3}(\log_3 a - 1)$. B. $3(\log_3 a - 1)$. C. $3\log_3 a - 1$. D. $\log_3 a - 3$.

Câu 14. Cho số phức $z = 3 + 2i$. Phần ảo của số phức $\frac{1}{z}$ bằng

- A. $\frac{3}{13}$. B. $\frac{2}{13}$. C. $-\frac{2}{13}$. D. $-\frac{2}{13}i$.

Câu 15. Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính R là

- A. $S = \frac{4}{3}\pi R^2$. B. $S = 4\pi R^2$. C. $S = 2\pi R^2$. D. $S = \pi R^2$.

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{5}{1-2x}$. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

- A. $y = \frac{1}{2}$. B. $y = -\frac{5}{2}$. C. $y = 0$. D. $y = 5$.

Câu 17. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = 3x^3 - 2x + 1$?

- A. $C(0;0)$. B. $D(1;1)$. C. $A(-1;2)$. D. $B(1;2)$.

Câu 18. Tập xác định của hàm số $y = \ln(-x^2 + 3)$ là

- A. $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$. B. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$. C. $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$. D. $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$.

Câu 19. Trên khoảng $(0; +\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{\frac{3}{5}}$ là

- A. $\int f(x)dx = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} + C$. B. $\int f(x)dx = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + C$.
C. $\int f(x)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{1}{5}} + C$. D. $\int f(x)dx = \frac{8}{5}x^{\frac{8}{5}} + C$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - 7 = 0$. Xác định tọa độ tâm I của mặt cầu (S) :

- A. $I(1;2;-2)$. B. $I(2;4;-4)$. C. $I(-2;-4;4)$. D. $I(-1;-2;2)$.

Câu 21. Cho số phức z thỏa mãn: $(1+2i)z = -4+7i$. Số phức liên hợp của z là

- A. $3+2i$. B. $2+3i$. C. $2-3i$. D. $3-2i$.

Câu 22. Cho hàm $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, $AB = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $2a$. C. a . D. $a\sqrt{3}$.

Câu 24. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AB = a$; $AD = b$; $AA' = c$. Thể tích V của khối hộp chữ nhật đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

- A. $V = \frac{1}{6}abc$. B. $V = abc$. C. $V = \frac{1}{3}abc$. D. $V = \frac{1}{2}abc$.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 0)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-1; +\infty)$. D. $(-\infty; -1)$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -3; 1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 12 = 0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là

- A. $\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-1}$. B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1}$.
C. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{-1}$. D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{-1}$.

Câu 27. Cho hình nón có đường sinh bằng $4a$, diện tích xung quanh bằng $8\pi a^2$. Tính chiều cao của hình nón đó theo a .

- A. $2a$. B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $2a\sqrt{3}$.

Câu 28. Cho $a; b$ là các số thực dương thỏa mãn: $\log_3 a^3 b^2 - \log_3 b = 4$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a^3 b = 81$. B. $a^2 b = 4$. C. $a^3 b = 12$. D. $ab = 1$.

Câu 29. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[0; 2]$. Tính tổng $S = m + M$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{4}{3}$. C. 2 . D. 3 .

Câu 30. Đạo hàm của hàm số $y = 2022^x$ là:

- A. $y' = 2022^x \cdot \ln 2022$. B. $y' = 2022^x \cdot \ln x$. C. $y' = x \cdot 2022^{x-1}$. D. $y' = \frac{2022^x}{\ln 2022}$.

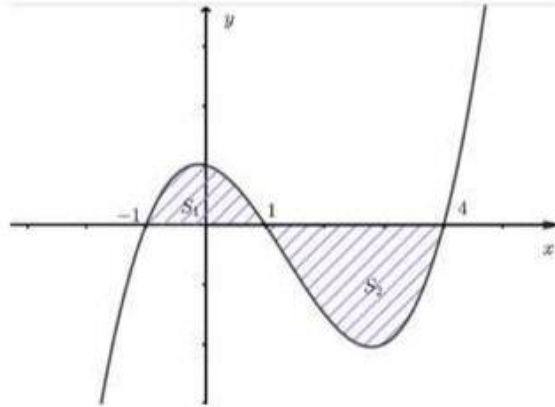
Câu 31. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 12$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- A. -6 . B. $\frac{1}{3}$. C. 3 . D. 6 .

Câu 32. Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_0^3 [1 + f(x)] dx$ bằng

- A. $\frac{93}{4}$. B. $\frac{39}{4}$. C. 10. D. 12.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết diện tích hai phần gạch chéo lần lượt là $S_1 = 5, S_2 = 12$. Tính $I = \int_{-1}^4 f(x) dx$

- A. 7. B. -7. C. 17. D. 60.

Câu 34. Hàm số $F(x) = \frac{x^3}{3} + e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nào sau đây?

- A. $f(x) = 3x^2 + e^x$. B. $f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x$. C. $f(x) = x^2 + e^x$. D. $f(x) = \frac{x^4}{3} + e^x$.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm

- A. $x = -3$. B. $x = 1$. C. $x = -2$. D. $x = 0$.

Câu 36. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm H của AB . Góc giữa hai mặt phẳng $(A'CD)$ và $(ABCD)$ bằng 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AA' = a\sqrt{7}$.

- A. $V = 4\sqrt{7}a^3$. B. $V = 24a^3$. C. $V = 12\sqrt{7}a^3$. D. $V = 8a^3$.

Câu 37. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m-1)z + m^2 - 3 = 0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{5}$. Tính tổng các phần tử của tập S .

- A. 4. B. $\frac{9}{2}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. 5.

Câu 38. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn bất phương trình $(\log_2^2(x-1) - 2\log_2(x-1) - 3)\sqrt{100-x^2} \leq 0$?

- A. 10. B. 7. C. 9. D. 8.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \sin x - 9\cos 3x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$, khi đó $F(\pi)$ bằng

- A. 2π . B. $2+2\pi$. C. -2π . D. $2-2\pi$.

Câu 40. Cho hai đường thẳng song song a và b . Trên đường thẳng a lấy 6 điểm phân biệt; trên đường thẳng b lấy 5 điểm phân biệt. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm trong các điểm đã cho trên hai đường thẳng a và b . Tính xác suất để 3 điểm được chọn tạo thành một tam giác.

- A. $\frac{5}{11}$. B. $\frac{60}{169}$. C. $\frac{2}{11}$. D. $\frac{9}{11}$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=-1-4t \\ z=6+6t \end{cases}$ và đường

thẳng $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-5}$. Phương trình đường thẳng đi qua $A(1; -1; 2)$, đồng thời vuông góc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 là

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$. B. $\frac{x-1}{14} = \frac{y+1}{17} = \frac{z-2}{9}$.
C. $\frac{x+1}{14} = \frac{y-1}{17} = \frac{z+2}{9}$. D. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{4}$.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y	$+\infty$	0	-2	$+\infty$

Đặt $g(x) = f[2f(x)+1]$ Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $g'(x) = 0$ là

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 5.

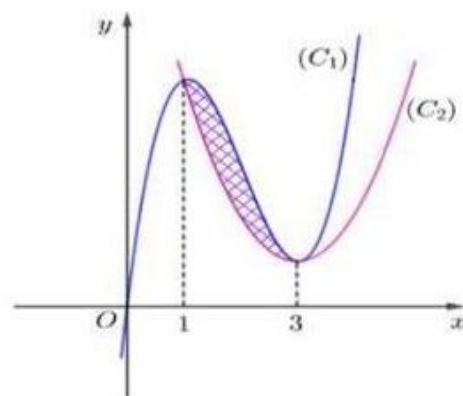
Câu 43. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $5|z_1 - i| = |z_1 + 1 + i| + 3|z_1 - 1 - 3i|$ và $|z_2 + i| = 5$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1 + z_2 - 2 - 4i|$ bằng

- A. $5+3\sqrt{5}$. B. $2+\sqrt{13}$. C. 9. D. $5+4\sqrt{5}$.

Câu 44. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp ABC$, tam giác ABC vuông tại B , $AC = 2a$, $BC = a$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng SBC .

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

Câu 45. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $g(x) = ax^2 + bx + e$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị lần lượt là hai đường cong (C_1) , (C_2) ở hình vẽ bên. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị (C_1) , (C_2) bằng $\frac{8}{3}$. Tính $f(2) - g(-1)$.



- A. $f(2) - g(-1) = -26$. B. $f(2) - g(-1) = -24$.
C. $f(2) - g(-1) = -28$. D. $f(2) - g(-1) = -30$.

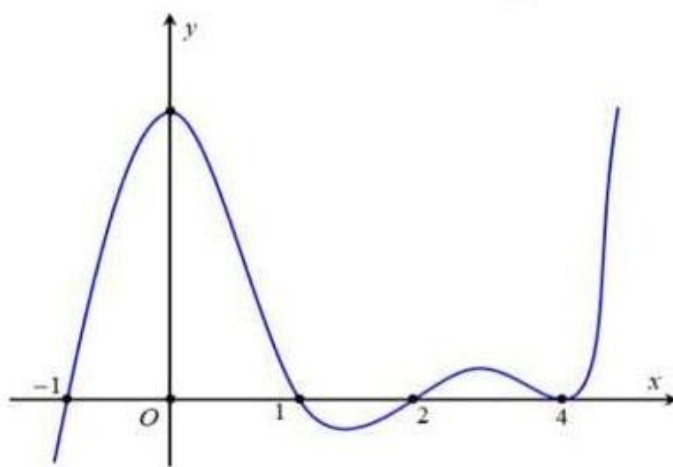
Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng: $(\alpha): 2x + y - z - 3 = 0$ và $(\beta): 2x - y + 5 = 0$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) song song với trục Oz và chứa giao tuyến của (α) và (β) .

- A. $(P): 2x + y - 5 = 0$. B. $(P): 2x - y + 5 = 0$.
C. $(P): 2x - y - 5 = 0$. D. $(P): 2x + y + 5 = 0$.

Câu 47. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$. AB là một dây cung của đường tròn $(O; R)$ sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O; R)$ một góc 60° . Tính thể tích V của khối trụ đã cho theo R .

- A. $V = \frac{\pi\sqrt{7}R^3}{7}$. B. $V = \frac{3\pi\sqrt{5}R^3}{5}$. C. $V = \frac{\pi\sqrt{5}R^3}{5}$. D. $V = \frac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đúng 4 điểm chung với trục hoành như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|x|^3 - 3|x| + m + 2021) + 2022m^3$ có đúng 11 điểm cực trị?



- A. 1. B. 2.
C. 0. D. 5.

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): (x+4)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 16$, $(S_2): (x+4)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 36$ và điểm $A(6; 3; 0)$. Đường thẳng d đi động nhưng luôn tiếp xúc với (S_1) , đồng thời cắt (S_2) tại hai điểm B, C . Tam giác ABC có diện tích lớn nhất là

- A. $4\sqrt{5}(\sqrt{26} + 2)$. B. $8\sqrt{5}(\sqrt{26} + 2)$. C. $4\sqrt{130}$. D. $8\sqrt{26}$.

Câu 50. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2022$, $y \geq 2$ và $x^2 + x - xy = x \log_2(xy - x) - 2^x$?

- A. 2023. B. 2022. C. 12. D. 11.

----- HẾT -----

ĐÁP ÁN CÁC MÃ ĐỀ

Mã đề [101]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	C	A	A	B	B	B	C	B	C	C	A	B	C	B	C	D	A	B	A	C	B	A	B	D
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	D	A	D	A	D	D	B	C	D	B	A	C	C	D	B	A	D	A	C	B	D	A	A	D

Mã đề [102]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	D	A	C	A	B	B	D	A	A	C	D	D	C	B	A	B	A	B	C	D	A	C	C	C
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	C	D	C	B	A	A	B	D	D	D	D	B	C	B	C	D	A	A	A	B	A	D	B	B

Mã đề [103]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	B	D	D	D	B	D	C	B	C	B	B	B	C	D	A	C	D	A	B	C	B	C	D	C
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	A	D	D	A	C	A	D	A	A	B	D	A	C	C	A	C	B	A	A	B	A	B	A	B

Mã đề [104]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	C	A	C	C	D	C	A	A	A	A	D	A	B	D	C	B	D	B	C	D	C	B	D	B
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
D	B	C	A	C	D	A	B	C	C	B	D	B	B	D	A	A	A	D	A	A	B	B	C	B

Mã đề [105]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	B	C	A	B	C	B	A	A	B	A	D	C	C	A	A	C	D	A	B	C	A	D	D	B
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
D	C	D	C	C	B	B	A	D	D	B	A	A	C	A	C	B	B	C	B	B	A	D	D	D

Mã đề [106]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	A	B	B	D	D	B	C	C	A	C	C	C	D	D	B	D	A	C	B	A	D	B	C	B
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
D	A	C	A	D	A	B	B	D	C	D	A	C	D	B	A	A	A	A	D	A	C	B	B	C

Mã đề [107]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	A	C	B	A	B	C	D	A	B	D	C	A	B	C	D	D	A	B	A	B	B	C	C	C
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
D	C	B	D	B	A	D	D	B	B	C	A	B	A	C	D	D	A	A	C	D	A	D	B	A

Mã đề [108]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	C	B	D	A	C	C	D	D	D	A	A	A	A	D	A	C	C	A	A	B	D	A	B	B
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	B	C	B	B	C	D	A	B	A	C	D	C	A	C	B	B	A	D	D	B	C	C	D	B

HDG MỘT SỐ CÂU VD-VDC

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \sin x - 9\cos 3x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. -2π .

B. $2 - 2\pi$.

C. 2π .

D. $2 + 2\pi$.

Lời giải

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int (\sin x - 9\cos 3x) dx = -\cos x - 3\sin 3x + C$.

Do $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow -\cos\frac{\pi}{2} - 3\sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + C = 1 \Rightarrow C = -2$.

Nên $f(x) = -\cos x - 3\sin 3x - 2$.

Ta có $F(x) = \int (-\cos x - 3\sin 3x - 2) dx = -\sin x + \cos 3x - 2x + C_1$.

Do $F(0) = 2 \Rightarrow -\sin 0 + \cos(3 \cdot 0) - 2 \cdot 0 + C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = 1$.

Vậy $F(x) = -\sin x + \cos 3x - 2x + 1 \Rightarrow F(\pi) = -2\pi$.

Câu 42. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm H của AB . Góc giữa hai mặt phẳng $(A'CD)$ và $(ABCD)$ bằng 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AA' = a\sqrt{7}$.

A. $V = 8a^3$.

B. $V = 4\sqrt{7}a^3$.

C. $V = 24a^3$.

D. $V = 12\sqrt{7}a^3$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của CD .

Ta có $\left. \begin{array}{l} CD \perp HM \\ CD \perp A'H \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (A'HM) \Rightarrow CD \perp A'M$

Mà $(A'CD) \cap (ABCD) = CD$ và $CD \perp HM$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(A'CD)$ và $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng

$A'M$ và HM và bằng góc $A'MH = 30^\circ$ (vì tam giác $A'HM$ vuông tại H).

Đặt $AD = x (x > 0) \Rightarrow HM = x, AH = \frac{x}{2}$.

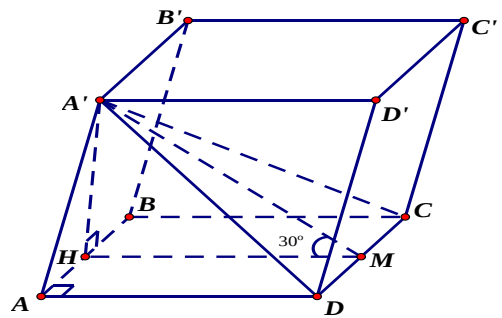
Có $\tan 30^\circ = \frac{A'H}{HM} \Rightarrow A'H = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Trong tam giác vuông $A'HA$ có $A'A^2 = A'H^2 + AH^2$

$$\Leftrightarrow 7a^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}a = AD.$$

$$\Rightarrow A'H = 2a.$$

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = 2a \cdot (2a\sqrt{3})^2 = 24a^3$.



Câu 43. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m-1)z + m^2 - 3 = 0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{5}$. Tính tổng các phần tử của tập S .

A. 5.

B. 4.

C. $\frac{9}{2}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Xét phương trình : $z^2 - 2(m-1)z + m^2 - 3 = 0$ (1). Ta có:

$$\Delta' = (b')^2 - ac = (m-1)^2 - 1 \cdot (m^2 - 3) = 4 - 2m.$$

Trường hợp 1: Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 2$ thì phương trình (1) có hai nghiệm thực z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow (z_1 - z_2)^2 = 20 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 - 4z_1.z_2 = 20$ (*).

Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = 2(m-1) \\ z_1.z_2 = m^2 - 3 \end{cases}$ thay vào (*) có

$$4(m-1)^2 - 4(m^2 - 3) = 20 \Leftrightarrow 4 - 2m = 5 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Trường hợp 2: Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 2$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phức là $z_1 = (m-1) + i\sqrt{2m-4}$, $z_2 = (m-1) - i\sqrt{2m-4}$. Ta có

$$|z_1 - z_2| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |2i\sqrt{2m-4}| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{2m-4} = \sqrt{5} \Leftrightarrow m = \frac{9}{2} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy $S = \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{9}{2} \right\}$ nên tổng các phần tử của S là 4.

Câu 44. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $5|z_1 - i| = |z_1 + 1 + i| + 3|z_1 - 1 - 3i|$ và $|z_2 + i| = 5$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1 + z_2 - 2 - 4i|$ bằng

A. $5 + 3\sqrt{5}$.

B. $2 + \sqrt{13}$.

C. 9.

D. $5 + 4\sqrt{5}$.

Lời giải

$$\text{Gọi } z_1 = x_1 + y_1i \Rightarrow M(x_1; y_1)$$

$$z_2 = x_2 + y_2i \Rightarrow N(x_2; y_2)$$

$$z_3 = i \Rightarrow C(0; 1)$$

$$z_4 = -1 - i \Rightarrow A(-1; -1)$$

$$z_5 = 1 + 3i \Rightarrow B(1; 3)$$

Dễ thấy điểm C là trung điểm của AB và $AB = 2\sqrt{5}$

Theo công thức đường trung tuyến, ta có:

$$MC^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 2MC^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$\text{Mặt khác theo bài ra ta có: } 5|z_1 - i| = |z_1 + 1 + i| + 3|z_1 - 1 - 3i|$$

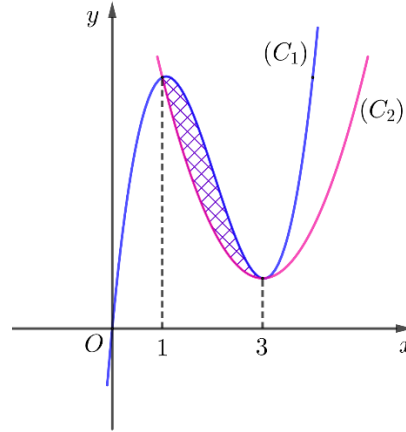
$$\Rightarrow 5MC = MA + 3MB \leq \sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{MA^2 + MB^2} \text{ (BĐT Bunhiakovski).}$$

$$\Leftrightarrow 25MC^2 \leq 10(MA^2 + MB^2) = 10(2MC^2 + 10)$$

$$\Leftrightarrow 5MC^2 \leq 100 \Leftrightarrow MC^2 \leq 20 \Leftrightarrow MC \leq 2\sqrt{5}$$

$$P = |z_1 + z_2 - 2 - 4i| = |(z_1 - i) + (z_2 + i) + (-2 - 4i)| \\ \leq |z_1 - i| + |z_2 + i| + |-2 - 4i| = 2\sqrt{5} + 5 + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5} + 5.$$

Câu 45. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $g(x) = ax^2 + bx + e$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị lần lượt là hai đường cong (C_1) , (C_2) ở hình vẽ bên.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị (C_1) , (C_2) bằng $\frac{8}{3}$. Tính $f(2) - g(-1)$.

A. $f(2) - g(-1) = -26$.

B. $f(2) - g(-1) = -24$.

C. $f(2) - g(-1) = -28$.

D. $f(2) - g(-1) = -30$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta có $f(x) - g(x) = a(x-1)(x-3)^2$ và $a > 0$

$$\text{Ta có: } S = \int_1^3 |f(x) - g(x)| dx = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \int_1^3 |a(x-1)(x-3)^2| dx = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \int_1^3 a(x-1)(x-3)^2 dx = \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 a(x^3 - 7x^2 + 15x - 9) dx = \frac{8}{3} \Leftrightarrow a \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{15}{2}x^2 - 9x \right) \Big|_1^3 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{3}a = \frac{8}{3} \Leftrightarrow a = 2.$$

$$\text{Do đó } f(x) - g(x) = 2(x-1)(x-3)^2 \Leftrightarrow (ax^3 + bx^2 + cx + d) - (ax^2 + bx + e) = 2(x-1)(x-3)^2$$

$$\Leftrightarrow ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x + d - e = 2(x^3 - 7x^2 + 15x - 9)$$

Đồng nhất hệ số ta có

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - a = -14 \\ c - b = 30 \\ d - e = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -12 \\ c = 18 \\ d = e - 18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + e - 18; g(x) = 2x^2 - 12x + e \Rightarrow f(2) - g(-1) = -28$$

Vậy $f(2) - g(-1) = -28$.

Câu 47. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$. AB là một dây cung của đường tròn $(O; R)$ sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ tạo

với mặt phẳng chứa đường tròn $(O; R)$ một góc 60° . Tính thể tích V của khối trụ đã cho theo R .

A. $V = \frac{\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

B. $V = \frac{3\pi\sqrt{5}R^3}{5}$.

C. $V = \frac{\pi\sqrt{5}R^3}{5}$.

D. $V = \frac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

Lời giải

Đặt độ dài cạnh $AB = x$ ($x > 0$) và M là trung điểm AB .

Vì tam giác $O'AB$ đều nên

$$O'A = O'B = AB = x \Rightarrow O'M = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Vì mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O; R)$ góc 60° nên $O'MO = 60^\circ$.

Xét tam giác $O'OM$ vuông tại O ta có: $\cos O'MO = \frac{OM}{O'M}$.

Suy ra

$$\cos 60^\circ = \frac{OM}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow OM = \frac{x\sqrt{3}}{4}$$

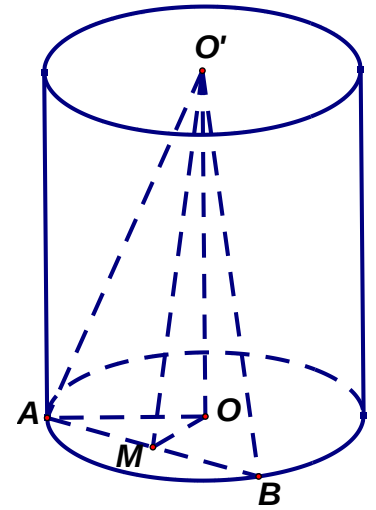
Xét tam giác OAM vuông ở M có: $OA^2 = OM^2 + AM^2$ nên

$$R^2 = \left(\frac{x\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{7}{16}x^2 \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{7}}{7}R$$

Do đó: $O'M = \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{21}}{7}R$ và $OM = \frac{x\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{21}}{7}R$. Vì vậy, ta có

$$OO' = \sqrt{O'M^2 - OM^2} = \frac{3\sqrt{7}}{7}R.$$

Vậy thể tích khối trụ là $V = \pi R^2 \cdot h = \pi R^2 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{7}R \Rightarrow V = \frac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.



Câu 48. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2022$, $y \geq 2$ và

$$x^2 + x - xy = x \log_2(xy - x) - 2^x?$$

A. 2022.

B. 12.

C. 11.

D. 2023.

Lời giải

Từ điều kiện $0 \leq x \leq 2022$, $y \geq 2$, ta được $xy - x = x(y - 1) \geq 0$.

Kết hợp điều kiện của $\log_2(xy - x)$, ta được.

Đặt $t = \log_2(xy - x)$. Khi đó ta được $x^2 - 2^t = xt - 2^x \Leftrightarrow 2^x + x \cdot x = 2^t + x \cdot t$ (1)

Nếu $x > t$ thì $2^x + x \cdot x > 2^t + x \cdot t$, với $x > 0$, mâu thuẫn với (1).

Tương tự $x < t$ cũng được kết quả mâu thuẫn với (1).

Từ đó: $x = t \Leftrightarrow xy - x = 2^x \Leftrightarrow y = 1 + \frac{2^x}{x}$.

Vì $0 < x \leq 2022$, $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$ nên $2^x : x$ suy ra $x \in \{2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{10}\}$.

Ứng với mỗi giá trị của x ở trên thì $y = 1 + \frac{2^x}{x}$ có duy nhất một giá trị tương ứng.

Vậy có 11 cặp số nguyên thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu

$(S_1): (x+4)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 16, (S_2): (x+4)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 36$ và điểm $A(6;3;0)$. Đường thẳng d di động nhưng luôn tiếp xúc với (S_1) , đồng thời cắt (S_2) tại hai điểm B, C .

Tam giác ABC có diện tích lớn nhất là

A. $4\sqrt{5}(\sqrt{26}+2)$.

B. $8\sqrt{5}(\sqrt{26}+2)$.

C. $4\sqrt{130}$.

D. $8\sqrt{26}$.

Lời giải

Mặt cầu $(S_1), (S_2)$ có cùng tâm $I(-4;1;0)$ và lần lượt có bán kính là $R_1 = 4, R_2 = 6$.

Ta có $IA = 2\sqrt{26} > R_2 > R_1$, suy ra điểm A nằm ngoài $(S_1), (S_2)$.

Gọi T là hình chiếu của I trên d , ta có $TB = \sqrt{IB^2 - IT^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$,

Suy ra $BC = 4\sqrt{5}$.

Gọi (P) là tiếp diện của mặt cầu (S_1) tại T , khi đó đường thẳng d qua T và nằm trong (P) .

Gọi H là hình chiếu của A trên d .

Ta có $AH \leq AT$, dấu bằng xảy ra khi $d \perp AT$.

Gọi M, N là các giao điểm của đường thẳng AI và (S_1) với M là điểm gần A hơn.

Ta có $AN = AI + R_1 = 2\sqrt{26} + 4$.

Mà $AT \leq AN \Rightarrow AH \leq 2\sqrt{26} + 4$, dấu bằng xảy ra khi $d \perp AN$.

Mặt khác $S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow S_{ABC} \leq \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot (2\sqrt{26} + 4) = 4\sqrt{5}(\sqrt{26} + 2)$.

Vậy diện tích lớn nhất của tam giác ABC là $4\sqrt{5}(\sqrt{26} + 2)$.

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục

trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có

đúng 4 điểm chung với trục hoành

như hình bên. Có bao nhiêu giá trị

nguyên của tham số m để hàm số

$y = f(|x|^3 - 3|x| + m + 2021) + 2022m^3$ có

đúng 11 điểm cực trị?

A. 1.

B. 2.

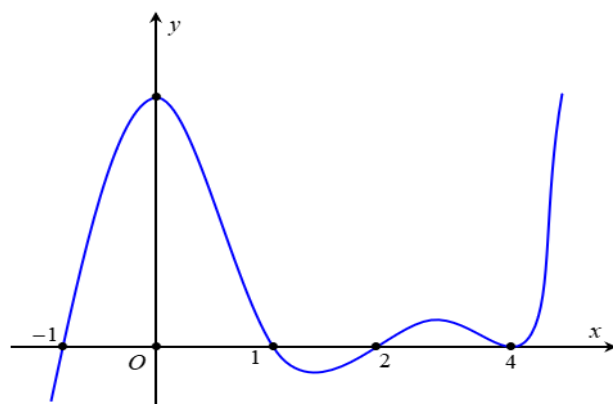
C. 0.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Với mỗi tham số m thì số điểm cực trị của hàm số :

$y = f(|x|^3 - 3|x| + m + 2021) + 2022m^3$



và : $y = f(|x|^3 - 3|x| + m + 2021)$ là như nhau.

Do đó ta chỉ cần tìm giá trị nguyên của tham số m để hàm số : $y = f(|x|^3 - 3|x| + m + 2021)$

có đúng 11 điểm cực trị.

Xét $x > 0$: Hàm số có dạng $y = f(x^3 - 3x + m + 2021)$

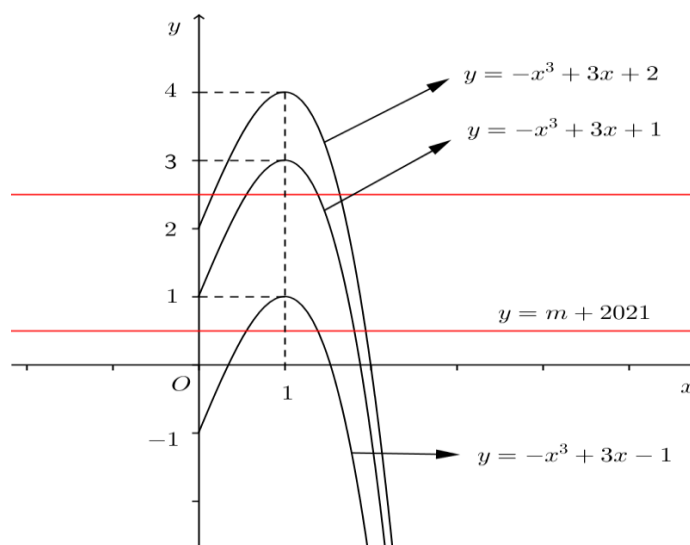
Khi đó ta có đạo hàm như sau: $y' = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x + m + 2021)$

Do nghiệm của phương trình $x^3 - 3x + m + 2021 = 4$ là các nghiệm bội chẵn của phương trình $y' = 0$ nên ta chỉ cần quan tâm đến các nghiệm còn lại. Tức là

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ f'(x^3 - 3x + m + 2021) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (do } x > 0) \\ x^3 - 3x + m + 2021 = -1 \\ x^3 - 3x + m + 2021 = 1 \\ x^3 - 3x + m + 2021 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \text{ (do } x > 0) \\ m + 2021 = -x^3 + 3x - 1 \\ m + 2021 = -x^3 + 3x + 1 \\ m + 2021 = -x^3 + 3x + 2 \end{cases}$$

Vẽ đồ thị ba hàm số $y = -x^3 + 3x - 1$; $y = -x^3 + 3x + 1$; $y = -x^3 + 3x + 2$ với $x > 0$ trên cùng một hệ trục.



Hàm số $y = f(|x|^3 - 3|x| + m + 2021)$ có đúng 11 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Hàm số $y = f(x^3 - 3x + m + 2021)$ có đúng 5 điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f'(x^3 - 3x + m + 2021) = 0$ có đúng 4 nghiệm bội lẻ dương và khác 1

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = m + 2021$ cắt đồ thị ba hàm số $y = -x^3 + 3x - 1$; $y = -x^3 + 3x + 1$; $y = -x^3 + 3x + 2$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ dương khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m + 2021 < 1 \\ 2 < m + 2021 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2022 < m < -2020 \\ -2019 < m < -2018 \end{cases}$. Do điều kiện m nguyên nên $m = -2021$.

Vậy chỉ có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.