

Họ và tên:..... SBD:.....

Mã đề thi
101

Câu 1. Nghiệm của phương trình $\log(4x-6)=1$ là

- A. $x = \frac{9}{2}$. B. $x = \frac{7}{4}$. C. $x = 4$. D. $x = 5$.

Câu 2. Trong không gian Oxyz cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(-1; -2; -3)$ B. $(1; 2; 3)$ C. $(-1; 2; 3)$ D. $(1; -2; -3)$

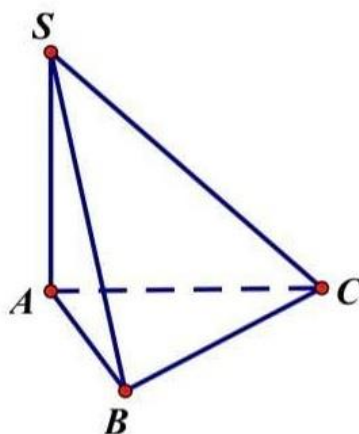
Câu 3. Mô đun của số phức $z = 3 - 2i$ bằng

- A. 5. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{5}$. D. 13.

Câu 4. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$

- A. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$. B. $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$.
C. $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$. D. $\int \cos 3x dx = 3 \sin x + C$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$, tam giác ABC vuông tại B có $AC = \sqrt{2}a$, $BC = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng



- A. 45° . B. 90° . C. 30° . D. 60° .

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

Hàm số đã cho đồng biến trong khoảng nào dưới đây?

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(0; 2)$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 3mx^2 + 3(m-6)x$ có cực trị.

- A. $m < -3$ hoặc $m > 2$. B. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 2$.
C. $-3 \leq m \leq 2$. D. $-3 < m < 2$.

Câu 8. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 18$ trên $[-1; 3]$ bằng

- A. 27. B. 1. C. 2. D. 11.

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ là

- A. $\frac{x^4}{4} - x^3 + 5x + C$. B. $3x^2 - 6x + C$.
C. $x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 5x + C$. D. $x^4 - x^3 + 5x + C$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng vuông góc với đường thẳng $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{3}$ và đi qua điểm $A(2; 1; 3)$ là

- A. $2x + y + 3z - 11 = 0$. B. $-x + 2y - 3z + 13 = 0$.
C. $x - 2y + 3z - 9 = 0$. D. $x - 2y + 3z + 13 = 0$.

Câu 11. Cho hai số phức $z_1 = 3 + 2i$ và $z_2 = 3 - i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

- A. $6 - i$. B. $6 + i$. C. i . D. $6 + 3i$.

Câu 12. Cho a là một số dương, biểu thức $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

- A. $a^{\frac{6}{7}}$. B. $a^{\frac{7}{6}}$. C. $a^{\frac{4}{3}}$. D. $a^{\frac{5}{6}}$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^6 f(x)dx = 9$. Giá trị của tích phân $\int_0^2 f(3x)dx$ bằng

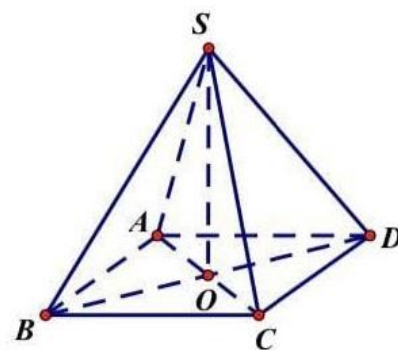
- A. 27. B. 3. C. 18. D. 1.

Câu 14. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3\sin x + 2}{\sin x + 1}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là?

- A. 2. B. $\frac{41}{2}$.
C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{5}{2}$.

Câu 15. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, O là tâm của mặt đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SO và CD bằng

- A. a . B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.
C. $\sqrt{2}a$. D. $\frac{a}{2}$.



Câu 16. Chi đoàn lớp 12 Toán có 30 đoàn viên trong đó có 12 đoàn viên nam và 18 đoàn viên nữ. Tính xác suất để khi chọn 3 đoàn viên thì có ít nhất 1 đoàn viên nữ.

- A. $\frac{44}{203}$. B. $\frac{192}{203}$. C. $\frac{204}{1015}$. D. $\frac{11}{203}$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(3; 5; -1)$, $B(7; -x; 1)$, $C(9; 2; y)$. Khi A, B, C thẳng hàng, giá trị $x + y$ bằng

- A. 5. B. 6. C. 4. D. -1.

Câu 18. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = 5^x$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành do hình phẳng D quay quanh trục hoành được tính theo công thức nào dưới đây?

- A. $V = 2\pi \int_0^2 5^{2x} dx$. B. $V = \int_{-2}^2 5^{2x} dx$. C. $V = \int_{-2}^2 |5^x| dx$. D. $V = \pi \int_{-2}^2 25^x dx$.

Câu 19. Tính môđun của số phức z thỏa mãn $(2 + i)z - 13i = 1$.

- A. $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$. B. $|z| = \sqrt{34}$. C. $|z| = 34$. D. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$.

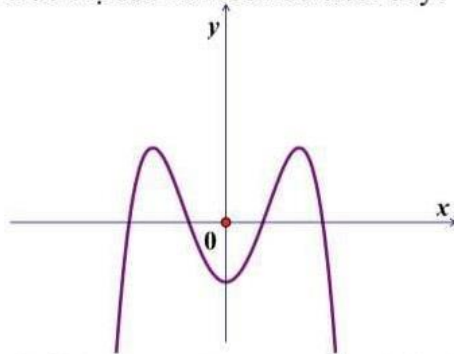
Câu 20. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ đạt cực tiểu tại điểm

- A. $x = 3$. B. $x = -1$. C. $x = 1$. D. $x = -3$.

Câu 21. Tìm phần ảo của số phức $z = 4 - 3i$

- A. -3 . B. $-3i$. C. 3 . D. 4 .

Câu 22. Đường cong trong hình vẽ sau là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



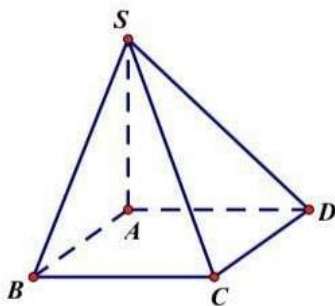
- A. $y = x^3 - 3x^2 - 1$ B. $y = x^4 - 3x^2 - 1$ C. $y = -x^4 + 3x^2 - 1$ D. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$

Câu 23. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$ và

$\Delta_2: \frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Δ_1 cắt Δ_2 B. Δ_1 trùng với Δ_2
C. Δ_1 và Δ_2 song song với nhau D. Δ_1 và Δ_2 chéo nhau

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$



- A. $3a^3$. B. $12a^3$. C. $4a^3$. D. a^3 .

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 3 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_3(1; -1; 3)$. B. $\vec{n}_4(2; -1; 3)$. C. $\vec{n}_2(2; 2; -1)$. D. $\vec{n}_1(2; 1; 3)$.

Câu 26. Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng 8, diện tích xung quanh bằng 8π . Tính bán kính đáy R của hình nón đó.

- A. $R = 4$. B. $R = 8$. C. $R = 1$. D. $R = 2$.

Câu 27. Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_7 \frac{1+x}{4-x}$

- A. $(-4; 1)$. B. $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.
C. $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$. D. $(-1; 4)$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{4}$?

- A. $N(-1; 2; 5)$. B. $Q(-1; 2; -5)$. C. $P(-2; 3; 4)$. D. $M(1; 2; 5)$.

Câu 29. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 4, u_2 = 2$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- A. -2 . B. 2 . C. 4 . D. $\frac{1}{2}$.

Câu 30. Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 3$ và $\int_0^5 f(x)dx = 6$ thì $\int_2^5 f(x)dx$ bằng

- A. 18 . B. 3 . C. 9 . D. -3 .

Câu 31. Một khối lăng trụ có diện tích đáy 4 và có thể tích bằng 6 thì chiều cao bằng :

- A. $\frac{1}{2}$. B. 24 . C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{9}{2}$.

Câu 32. Cho khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 3$. Tính thể tích khối trụ đó.

- A. 48π . B. 16π . C. $\frac{32\pi}{3}$. D. 8π .

Câu 33. Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được lập từ các chữ số $1; 2; 4; 5; 8$.

- A. 120 . B. 10 . C. 24 . D. 5 .

Câu 34. Hàm số $y = x^3 - 3x^2$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(0; 2)$. B. $(-4; 0)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 35. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-5}{x-2}$ là.

- A. $y = 3$. B. $y = 2$. C. $x = 3$. D. $x = 2$.

Câu 36. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-3) > 1$ là

- A. $S = \left(3; \frac{10}{3}\right)$. B. $S = \left(\frac{10}{3}; +\infty\right)$. C. $[3; +\infty)$. D. $S = \left[\frac{10}{3}; +\infty\right)$.

Câu 37. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^3$ bằng

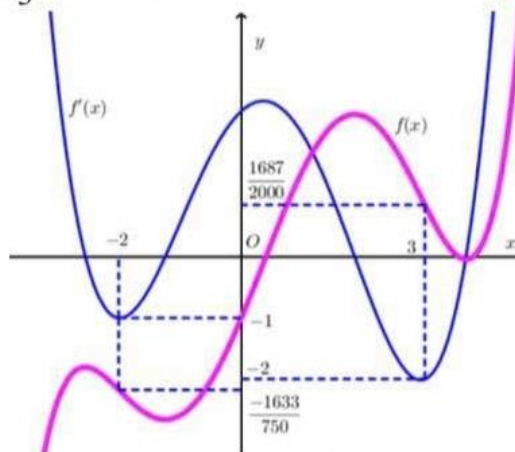
- A. $3\log_2 a$. B. $\frac{1}{3} + \log_2 a$. C. $\frac{1}{3}\log_2 a$. D. $3 + \log_2 a$.

Câu 38. Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{5}}$ là:

- A. R . B. $(0; +\infty)$. C. $[1; +\infty)$. D. $(1; +\infty)$.

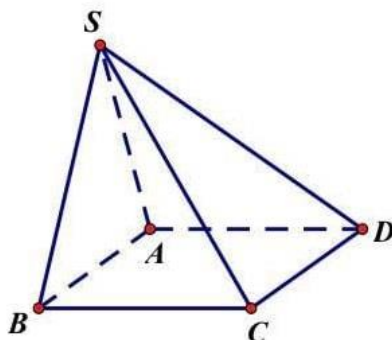
Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức và có đồ thị $f(x), f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$g(x) = f(x) + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + (3+m^2)\frac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + 4x + 2022$ trên đoạn $[-2; 3]$ không vượt quá 4044 .



- A. 32 . B. 30 . C. 31 . D. 29 .

Câu 40. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{\sqrt{7}a}{7}$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là



- A. $V = \frac{1}{36}a^3$. B. $V = \frac{1}{3}a^3$. C. $V = \frac{2}{3}a^3$. D. $V = \frac{a^3}{18}$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$; $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$. Tìm phương trình đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho $AB = \sqrt{29}$ và điểm A có hoành độ dương.

- A. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-2}{3}$. B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-3}{3}$.
C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+2}{-3}$. D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{3}$.

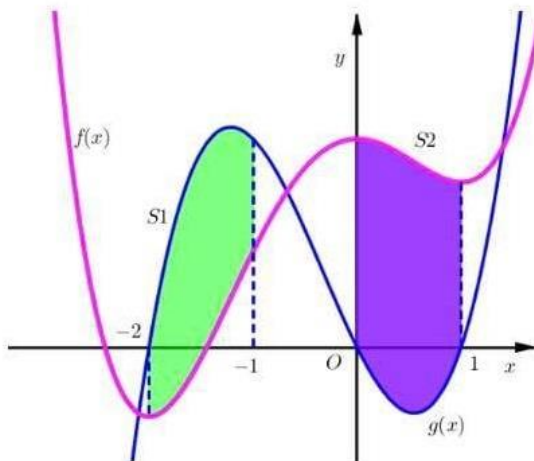
Câu 42. Tính tổng các nghiệm nguyên thuộc $[-5; 10]$ của bất phương trình: $2^{x^2+x} \cdot (3x^2 - 6x + 6) \geq 7x^2 - 29x + 34$.

- A. 54. B. 40. C. 55. D. 41.

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = xe^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2022$. Tính $\int_0^2 [f(x) - 2021] dx$.

- A. 2. B. -6. C. -2. D. 6.

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + bx + 2$ và hàm số $g(x) = cx^3 + dx^2 - 2x$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) là các hàm số có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S_1, S_2 là diện tích các hình phẳng tô màu trong hình vẽ, biết $S_1 = \frac{97}{60}$. Tính S_2 .



A. $\frac{143}{60}$.

B. $\frac{133}{60}$.

C. $\frac{153}{60}$.

D. $\frac{163}{60}$.

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 48$ và đường thẳng $(d): \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{\sqrt{2}}$. Điểm $M(a;b;c)$ ($a > 0$) nằm trên đường thẳng (d) sao cho từ M kẻ được 3 tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) thỏa mãn $AMB = 60^\circ$, $BMC = 90^\circ$ và $CMA = 120^\circ$. Tính $Q = a + b + c$.

A. $Q = 6 - 4\sqrt{2}$.

B. $Q = 10 + 4\sqrt{2}$.

C. $Q = 9 + 4\sqrt{2}$.

D. $Q = 9 - 4\sqrt{2}$.

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 3a$, góc $SAB = SCB = 90^\circ$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{6}$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a .

A. $108\pi a^3$.

B. $36\pi a^3$.

C. $6\pi a^3$.

D. $36\pi a^2$.

Câu 47. Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\left| (z_1 - 2 - i)(2 + 2\sqrt{3}i) \right| = \left| (z_1 - \bar{z}_1)(\sqrt{3} - i) \right|$ và $|z_2 + i| = |z_2 + 1 + 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ bằng:

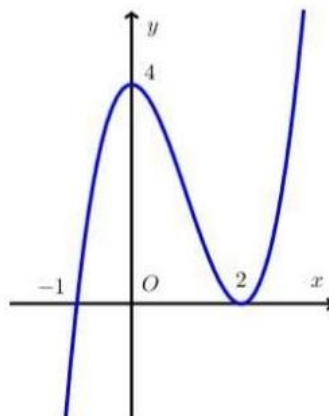
A. $\sqrt{7}$.

B. $2\sqrt{6}$.

C. $\frac{34}{5}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Câu 48. Cho hàm số $f(x) = (x+1)(x-2)^2$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng với hàm số $y = |x-2| \cdot (x^2 - x - 2)$.



A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$.

Câu 49. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn $\log_5(x^2 + y) \geq \log_4(x + y)$?

A. 37.

B. 38.

C. 40.

D. 36.

Câu 50. Có bao nhiêu số nguyên dương a để phương trình $z^2 - (a+3)z + a^2 - a = 0$ có 2 nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Nghiệm của phương trình $\log(4x - 6) = 1$ là

A. $x = \frac{9}{2}$.

B. $x = \frac{7}{4}$.

C. $x = 4$.

D. $x = 5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log(4x - 6) = 1 \Leftrightarrow 4x - 6 = 10 \Leftrightarrow x = 4$.

Câu 2: Trong không gian Oxyz cho mặt cầu $(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1; -2; -3)$.

B. $(1; 2; 3)$.

C. $(-1; 2; 3)$.

D. $(1; -2; -3)$.

Lời giải

Chọn C

Tâm của (S) có tọa độ là $I(-1; 2; 3)$.

Câu 3: Mô đun của số phức $z = 3 - 2i$ bằng

A. 5.

B. $\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. 13.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

Câu 4: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$

A. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$.

B. $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$.

C. $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$.

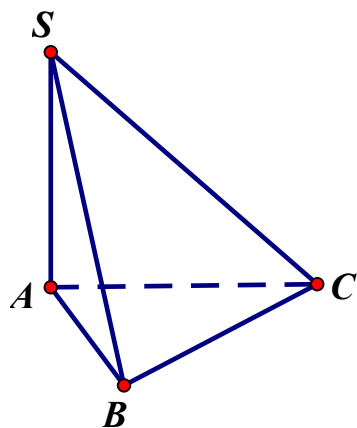
D. $\int \cos 3x dx = 3 \sin x + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$, tam giác ABC vuông tại B có $AC = \sqrt{2}a$, $BC = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng



A. 45° .

B. 90° .

C. 30° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn D

$$\text{Vì } \begin{cases} SB \cap (ABC) = B \\ SA \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow (SB, (ABC)) = \widehat{SBA}$$

Xét tam giác ABC vuông tại B có: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$

Xét tam giác SBA vuông tại A có $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Vậy $(SB, (ABC)) = \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Câu 6: Cho 6 điểm phân biệt trên mặt phẳng. Hỏi có bao nhiêu véc-tơ mà điểm đầu và điểm cuối là 6 điểm đã cho?

A. 30.

B. 15.

C. 21.

D. 36.

Lời giải

Chọn A.

Số vectơ có điểm đầu và điểm cuối tạo từ 6 điểm đã cho là $A_6^2 = 30$.

Câu 7: Tập xác định D của hàm số $y = (2-x)^{\frac{5}{9}} + \ln(x+2)$

A. $D = [-2; 2]$.

B. $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

C. $D = (-2; 2)$.

D. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định D của hàm số $y = (2-x)^{\frac{5}{9}} + \ln(x+2)$ là $D = (-2; 2)$.

Câu 8: Cho mặt cầu có diện tích bằng $16\pi a^2$. Khi đó, bán kính mặt cầu bằng

A. $\sqrt{2}a$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $2\sqrt{2}a$.

D. $2a$.

Lời giải

Chọn D

Có $4\pi R^2 = 16\pi a^2 \Leftrightarrow R = 2a$.

Câu 9: Cho số phức z thỏa mãn $|z| - z = 1 + 3i$. Tính tích phần thực và phần ảo của z

- A. 7 . **B. -12 .**
 C. -7 . **D. 12 .**

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$|z| - z = 1 + 3i = \sqrt{x^2 + y^2} - x - yi = 1 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow x.y = -3.4 = -12.$$

Câu 10: Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r bằng

- A. $\frac{1}{3}\pi rl$. **B. $4\pi rl$.**
C. πrl . **D. $2\pi rl$.**

Lời giải

Chọn C

Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r bằng πrl .

Câu 11: Cho hai số phức $z_1 = 3 + 2i$ và $z_2 = 3 - i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

- A. $6 - i$. **B. $6 + i$.** **C. i .** **D. $6 + 3i$.**

Lời giải

Chọn B

Ta có $z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (3 - i) = 6 + i$

Câu 12: Cho a là một số thực dương, biểu thức $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là

- A. $\bar{a}^{\frac{6}{5}}$. **B. $\bar{a}^{\frac{7}{6}}$.** **C. $\bar{a}^{\frac{4}{5}}$.** **D. $\bar{a}^{\frac{5}{6}}$.**

Lời giải

Chọn B

Ta có $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a} = a^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}}$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^6 f(x)dx = 9$. Giá trị của tích phân $\int_0^2 f(3x)dx$ bằng

- A. 27 . **B. 3 .** **C. 18 .** **D. 1 .**

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 3x \Rightarrow dt = 3dx$.

$$\int_0^2 f(3x)dx = \frac{1}{3} \int_0^6 f(t)dt = \frac{1}{3} \int_0^6 f(x)dx = 3$$

Câu 14: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3 \sin x + 2}{\sin x + 1}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là

- A. 2 .** **B. $\frac{41}{2}$.** **C. $\frac{1}{2}$.** **D. $\frac{5}{2}$.**

Lời giải

Chọn A.

Đặt $t = \sin x, t \in [0;1]$.

Khi đó $y = \frac{3t+2}{t+1} \Rightarrow y' = \frac{1}{(t+1)^2} > 0$. Suy ra hàm số đồng biến trên $[0;1]$.

$$\min_{[0;1]} y = y(0) = 2.$$

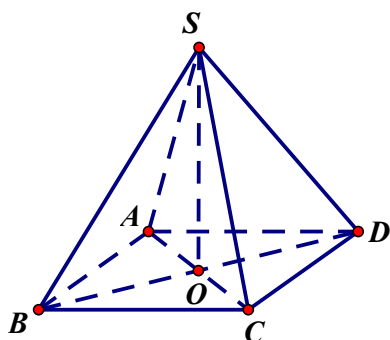
Câu 15: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng $2a$, O là tâm của mặt đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SO và CD bằng

A. a .

B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

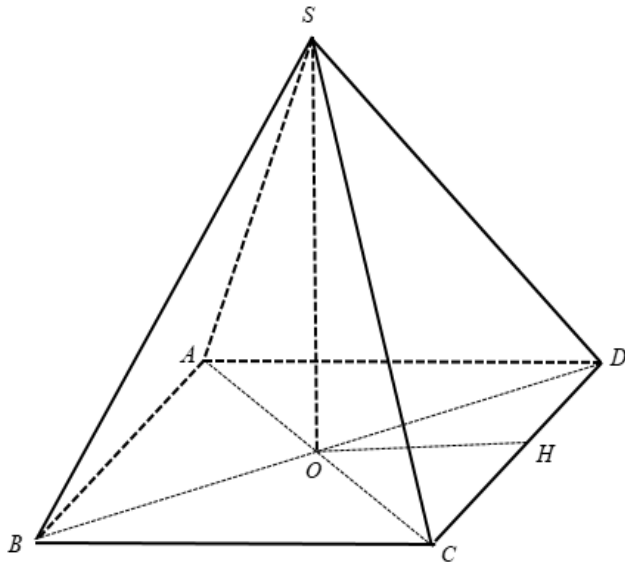
C. $\sqrt{2}a$.

D. $\frac{a}{2}$.



Lời giải

Chọn A.



Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$. Kẻ $OH \perp CD \Rightarrow H$ là trung điểm CD .

$SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp OH \Rightarrow OH$ là đoạn vuông góc chung của SO và CD .

$$d(SO; CD) = OH = \frac{1}{2}BC = a.$$

Câu 16: Chi đoàn lớp 12 Toán có 30 đoàn viên trong đó có 12 đoàn viên nam và 18 đoàn viên nữ. Tính xác suất để khi chọn 3 đoàn viên thì có ít nhất 1 đoàn viên nữ.

A. $\frac{44}{203}$.

B. $\frac{192}{203}$.

C. $\frac{204}{1015}$.

D. $\frac{11}{203}$.

Lời giải

Chọn B

Chọn 3 đoàn viên từ 30 đoàn viên có số cách là $C_{30}^3 \Rightarrow n(\omega) = C_{30}^3$.

Gọi biến cố A “ Trong 3 đoàn viên được chọn có ít nhất 1 đoàn viên nữ”.

$$\Rightarrow n(A) = C_{18}^1 \cdot C_{12}^2 + C_{18}^2 \cdot C_{12}^1 + C_{18}^3$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\omega)} = \frac{C_{18}^1 \cdot C_{12}^2 + C_{18}^2 \cdot C_{12}^1 + C_{18}^3}{C_{30}^3} = \frac{192}{203}.$$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(3;5;-1)$, $B(7;-x;1)$, $C(9;2;y)$. Khi A, B, C thẳng hàng, giá trị $x + y$ bằng

A. 5.

B. 6.

C. 4.

D. -1.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AC} = (6; -3; y+1); \overrightarrow{BC} = (2; 2+x; y-1).$$

Để A, B, C thẳng hàng thì $\overrightarrow{AC}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6 = k.2 \\ -3 = k.(2+x) \\ y+1 = k.(y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ x = -3 \\ y = 2 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow x + y = -1.$$

Câu 18: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = 5^x$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành do hình phẳng D quay quanh trục hoành được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $V = 2\pi \int_0^2 5^{2x} dx$.

B. $V = \int_{-2}^2 5^{2x} dx$.

C. $V = \int_{-2}^2 |5^x| dx$.

D. $V = \pi \int_{-2}^2 25^x dx$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối tròn xoay tạo thành do hình phẳng D quay quanh trục hoành được tính theo công

$$\text{thức } V = \pi \int_{-2}^2 (5^x)^2 dx = \pi \int_{-2}^2 25^x dx.$$

Câu 19: Tính môđun của số phức z thỏa mãn $(2+i)z - 13i = 1$

A. $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$.

B. $|z| = \sqrt{34}$.

C. $|z| = 34$.

D. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } (2+i)z - 13i = 1 \Leftrightarrow z = 3 + 5i.$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}.$$

Câu 20: Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x = 3$.

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

D. $x = -3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$.

$$y'' = 2x + 2.$$

$$\Rightarrow y''(1) = 4 > 0$$

$$y''(-3) = -4 < 0$$

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 21: Tìm phần ảo của số phức $z = 4 - 3i$

A. -3 .

B. $-3i$.

C. 3 .

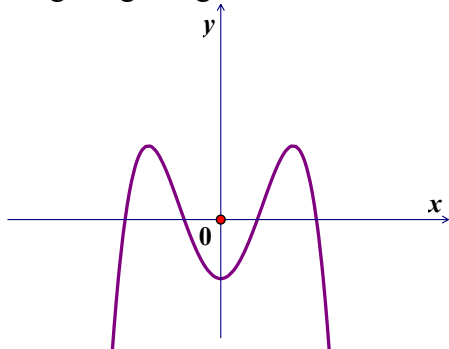
D. 4 .

Lời giải

Chọn A

Phần ảo của số phức $z = 4 - 3i$ bằng -3 .

Câu 22: Đường cong trong hình vẽ sau là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

B. $y = x^4 - 3x^2 - 1$.

C. $y = -x^4 + 3x^2 - 1$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Lời giải

Chọn C

+) Hình vẽ là đồ thị của hàm số bậc 4 trùng phương nên loại đáp án A, **D**.

+) Từ đồ thị hệ suy số của x^4 nhỏ hơn 0 loại **B**.

Câu 23: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$ và

$\Delta_2 : \frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Δ_1 cắt Δ_2 .

B. Δ_1 trùng với Δ_2

C. Δ_1 và Δ_2 song song với nhau.

D. Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Lời giải

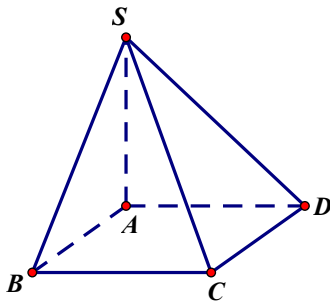
Chọn D

$$\text{PT tham số của } \Delta_2 : \begin{cases} x = 4 + 3a \\ y = -2 + 2a \ (a \in \mathbb{R}) \\ z = 4 - a \end{cases}$$

$$\text{Xét hệ phương trình: } \begin{cases} 4 + 3a = -3 + 2t \\ -2 + 2a = 1 - t \\ 4 - a = -1 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2t = -7 \\ 2a + t = 3 \\ a + 4t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{7} \\ t = \frac{23}{7} \\ a + 4t = 5 \end{cases} \quad (\text{hệ vô nghiệm}).$$

và $\vec{u}_{\Delta_1}(2; -1; 4)$, $\vec{u}_{\Delta_2}(3; 2; -1)$ không cùng phương nên Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$



A. $3a^3$.

B. $12a^3$.

C. $4a^3$.

D. a^3 .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Thể tích của khối chóp là: } V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} (2a)^2 \cdot 3a = 4a^3.$$

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 3 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?

A. $\vec{n}_3(1; -1; 3)$.

B. $\vec{n}_4(2; -1; 3)$.

C. $\vec{n}_2(2; 2; -1)$.

D. $\vec{n}_1(2; 1; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Một vector pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_2(2; 2; -1)$

Câu 26: Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng 8, diện tích xung quanh bằng 8π . Tính bán kính đáy R của hình nón đó.

A. $R = 4$.

B. $R = 8$.

C. $R = 1$.

D. $R = 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Diện tích xung quanh của hình nón là } S_{xq} = 8\pi \Leftrightarrow \pi \cdot R \cdot l = 8\pi \Leftrightarrow R = 1.$$

Câu 27: Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_7 \frac{1+x}{4-x}$

A. $(-4; 1)$.

B. $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

C. $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

D. $(-1; 4)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} \frac{1+x}{4-x} > 0 \\ 4-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 4.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $(-1; 4)$.

- Câu 28:** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{4}$?
- A.** $N(-1; 2; 5)$. **B.** $Q(-1; 2; -5)$. **C.** $P(-2; 3; 4)$. **D.** $M(1; 2; 5)$.

Lời giải

Chọn A

Nhận thấy đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{4}$ đi qua điểm $N(-1; 2; 5)$.

- Câu 29:** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 4, u_2 = 2$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng
- A.** -2 . **B.** 2 . **C.** 4 . **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } u_2 = u_1 \cdot q \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

- Câu 30:** Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 3$ và $\int_0^5 f(x) dx = 6$ thì $\int_2^5 f(x) dx$ bằng
- A.** 18 . **B.** 3 . **C.** 9 . **D.** -3 .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_0^5 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx \Rightarrow \int_2^5 f(x) dx = \int_0^5 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx = 6 - 3 = 3$$

- Câu 31:** Một khối lăng trụ có diện tích đáy 4 và có thể tích bằng 6 thì chiều cao bằng :
- A.** $\frac{1}{2}$. **B.** 24 . **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Chiều cao khối lăng trụ là: } h = \frac{V}{S} = \frac{3}{2}$$

- Câu 32:** Cho khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 3$. Tính thể tích khối trụ đó.
- A.** 48π . **B.** 16π . **C.** $\frac{32\pi}{3}$. **D.** 8π .

Lời giải

Chọn A.

Thể tích khối trụ là: $V = \pi.r^2.h = 48\pi$

- Câu 33:** Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1;2;4;5;8.
A. 120. **B.** 10. **C.** 24. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A.

Số các số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được lập thành từ các chữ số 1;2;4;5;8 là:
 $5.4.3.2 = 120$ (số)

- Câu 34:** Hàm số $y = x^3 - 3x^2$ nghịch biến trên khoảng nào?
A. $(0;2)$. **B.** $(-4;0)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$. Nên $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		0		-4		$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

- Câu 35:** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-5}{x-2}$ là.
A. $y = 3$. **B.** $y = 2$. **C.** $x = 3$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn A

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-5}{x-2}$ là $x = 2$.

- Câu 36:** Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-3) > 1$ là
A. $S = \left(3; \frac{10}{3}\right)$. **B.** $S = \left(\frac{10}{3}; +\infty\right)$. **C.** $S = [3; +\infty)$. **D.** $S = \left[\frac{10}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-3) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ x-3 < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \begin{cases} x > 3 \\ x < \frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < \frac{10}{3}.$$

Câu 37: Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^3$ bằng

A. $3\log_2 a$.

B. $\frac{1}{3} + \log_2 a$.

C. $\frac{1}{3}\log_2 a$.

D. $3 + \log_2 a$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_2 a^3 = 3\log_2 a$$

Câu 38: Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{5}}$ là:

A. $\mathbb{R}$.

B. $(0; +\infty)$.

C. $[1; +\infty)$.

D. $(1; +\infty)$.

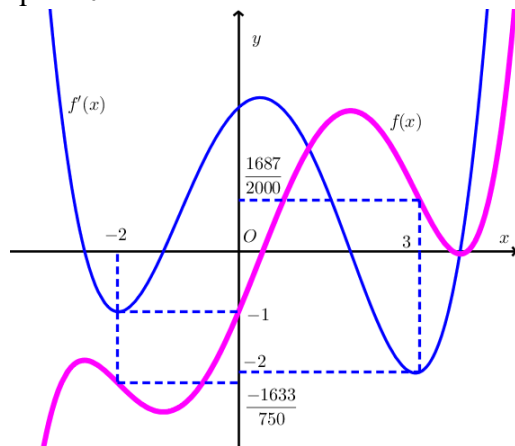
Lời giải

Chọn D

$$y = (x-1)^{\frac{1}{5}} \text{ điều kiện: } x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\text{Vậy } D = (1; +\infty).$$

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức và có đồ thị $f(x), f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x) + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + (3+m^2)\frac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + 4x + 2022$ trên đoạn $[-2; 3]$ không vượt quá 4044.



A. 32.

B. 30.

C. 31.

D. 29.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) + x^4 - 2x^3 + (3+m)x^2 - 2(m+1)x + 4 \\ &= f'(x) + (x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 3) + (mx - 1)^2 \end{aligned}$$

Xét hàm $h(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 3$ trên $[-2; 3]$.

$$h'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = (2x-1)(2x^2 - 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = +\infty$ và $h'(x)$ đổi dấu qua $x = \frac{1}{2}$ nên $\min_{[-2;3]} h(x) = h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{41}{16}$.

Do

vậy,

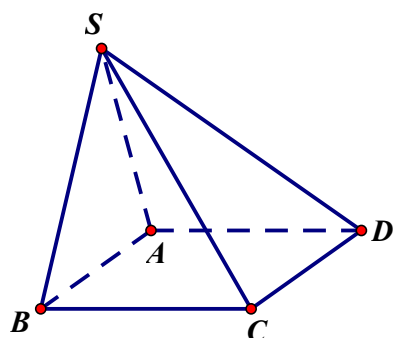
$$g'(x) = f'(x) + (x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 3) + (mx - 1)^2 \geq \frac{-1633}{750} + \frac{41}{16} = \frac{2311}{6000} > 0, \forall x \in [-2; 3].$$

Suy ra, hàm $g(x)$ đồng biến trên $[-2; 3]$

$$\Rightarrow \max_{[-2;3]} g(x) = g(3) = \frac{1687}{2000} + \frac{381}{10} + 2022 + 9m^2 - 9m \leq 4044 \Leftrightarrow -14,35... \leq m \leq 15,35...$$

Vậy $m \in \{-14; -13; \dots; 14; 15\}$. Có 30 số nguyên.

Câu 40: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{\sqrt{7}a}{7}$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là



A. $V = \frac{1}{36}a^3$.

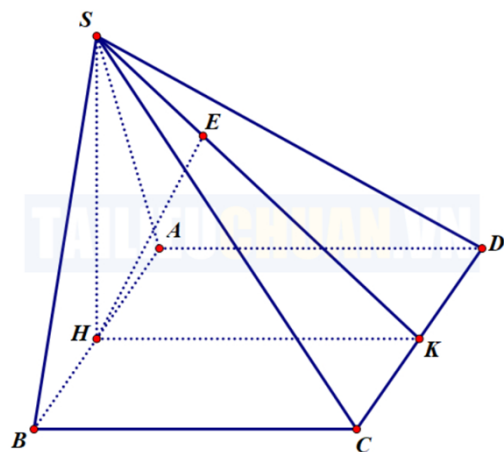
B. $V = \frac{1}{3}a^3$.

C. $V = \frac{2}{3}a^3$.

D. $V = \frac{a^3}{18}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD ; E là hình chiếu của H lên SK .

$$\text{Ta có } AB // CD \Rightarrow AB // (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HE = \frac{\sqrt{7}a}{7}.$$

$$\text{Ta có } SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow \Delta SHK \text{ vuông tại } H.$$

$$\text{Đặt } AB = x \Rightarrow SH = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

HE là đường cao trong tam giác vuông SHK nên

$$\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HK^2} \Rightarrow \frac{7}{a^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{4}{3x^2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2}{3} = \frac{a^3}{18}.$$

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$; $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$. Tìm phương trình đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho $AB = \sqrt{29}$ và điểm A có hoành độ dương

A. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-2}{3}$. B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-3}{3}$.
C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+2}{-3}$. D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$A \in d_1 \Rightarrow A(a-1; 2a-2; a) \quad (x_A > 0 \Rightarrow a > 1); B \in d_2 \Rightarrow B(2b+2; b+1; b+1).$$

$$d // (P) \Rightarrow \overrightarrow{BA}(a-2b-3; 2a-b-3; a-b-1) \perp \overrightarrow{n_{(P)}}(1; 1; -2) \Leftrightarrow a-b-4=0 \Leftrightarrow b=a-4 \\ \Rightarrow \overrightarrow{BA}(5-a; 1+a; 3).$$

$$\text{Do đó: } AB = \sqrt{29} \Leftrightarrow (a-5)^2 + (a+1)^2 + 9 = 29 \Leftrightarrow 2a^2 - 8a + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \text{ (ktm)} \\ a=3 \text{ (tm)} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra: } A(2; 4; 3); \overrightarrow{BA}(2; 4; 3)$$

$$\text{Vậy: } d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-3}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

Câu 42: Tính tổng các nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-5; 10]$ của bất phương trình:

$$2^{x^2+x}(3x^2-6x+6) \geq 7x^2-29x+34.$$

A. 54.

B. 40.

C. 55.

D. 41.

Lời giải

Chọn B

$$2^{x^2+x}(3x^2-6x+6) \geq 7x^2-29x+34 \Leftrightarrow 2^{x^2+x-2}(12x^2-24x+24) \geq 7x^2-29x+34 \quad (1).$$

Đặt $a = 12x^2 - 24x + 24$; $b = 7x^2 - 29x + 34$ ($a, b > 0$). Suy ra: $x^2 + x - 2 = \frac{a-b}{5}$. Thay vào (1)

ta được: $2^{\frac{a-b}{5}} a \geq b \Leftrightarrow a \cdot 2^{\frac{a}{5}} \geq b \cdot 2^{\frac{b}{5}} \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$ (2), với $f(t) = t \cdot 2^{\frac{t}{5}}$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Vậy (2)} \Leftrightarrow a \geq b \Rightarrow 12x^2 - 24x + 24 \geq 7x^2 - 29x + 34 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 1 \end{cases}.$$

Mà x nguyên thuộc đoạn $[-5; 10]$ nên $x \in \{-5; -4; -3; -2; 1; 2; \dots; 10\}$.

Vậy tổng các nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-5; 10]$ của bất phương trình đã cho là: 41.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = xe^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2022$. Tính $\int_0^2 [f(x) - 2021] dx$.

A. 2.

B. -6.

C. -2.

D. 6.

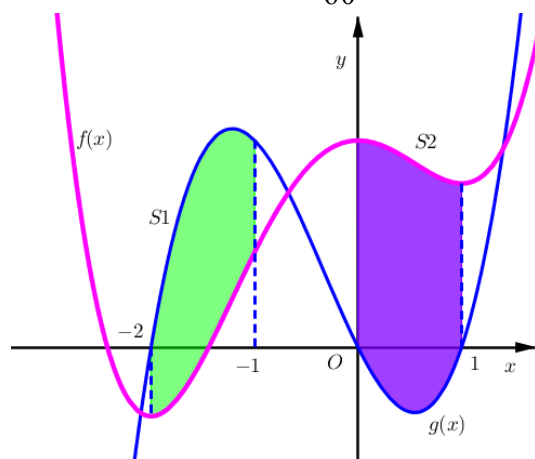
Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int xe^x dx = xe^x - e^x + C$ và $f(0) = 2022 \Rightarrow f(x) = xe^x - e^x + 2021$

$$\text{Khi đó } \int_0^2 [f(x) - 2021] dx = \int_0^2 (xe^x - e^x) dx = 2.$$

Câu 44: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + bx + 2$ và hàm số $g(x) = cx^3 + dx^2 - 2x$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) là các hàm số có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi $S_1; S_2$ là diện tích các hình phẳng tô màu trong hình vẽ, biết $S_1 = \frac{97}{60}$. Tính S_2 .



A. $\frac{143}{60}$.

B. $\frac{133}{60}$.

C. $\frac{153}{60}$.

D. $\frac{163}{60}$.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy các nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ là các điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

$$\Rightarrow f'(x) = kg(x) (k > 0) \Rightarrow \begin{cases} 4a = kc \\ 1 = kd \\ -2 = -2k \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = c \\ d = 1 \\ k = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ax^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2 \\ g(x) = 4ax^3 + x^2 - 2x \end{cases}$$

$$\text{Ta có } g(1) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) - g(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 2x + 2$$

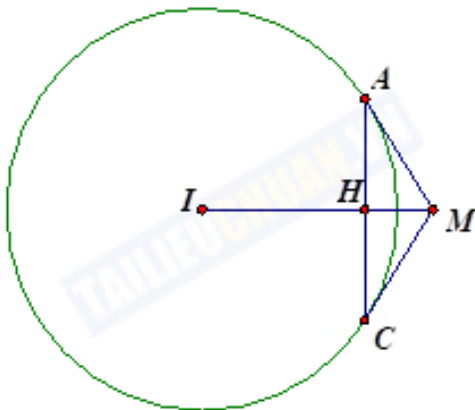
$$\text{Khi đó } S_1 = \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-2}^{-1} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 2x + 2 \right) dx = \frac{133}{60}.$$

Câu 45: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 48$ và đường thẳng $(d): \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{\sqrt{2}}$. Điểm $M(a; b; c)$ ($a > 0$) nằm trên đường thẳng (d) sao cho từ M kẻ được 3 tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) thỏa mãn $\widehat{AMB} = 60^\circ$, $\widehat{BMC} = 90^\circ$ và $\widehat{CMA} = 120^\circ$. Tính $Q = a + b - c$.

A. $Q = 6 - 4\sqrt{2}$. **B.** $Q = 10 + 4\sqrt{2}$. **C.** $Q = 9 + 4\sqrt{2}$. **D.** $Q = 9 - 4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 3)$ và bán kính $R = 4\sqrt{3}$.

Gọi đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (ABC) với mặt cầu (S) .

Đặt $MA = MB = MC = x$ ($x > 0$).

Áp dụng định lý cosin trong $\triangle AMB$ và $\triangle CMA$, ta có:

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cdot \cos \widehat{AMB} = 2x^2 - 2x^2 \cos 60^\circ = x^2 \Rightarrow AB = x.$$

$$AC^2 = MA^2 + MC^2 - 2MA \cdot MC \cdot \cos \widehat{AMC} = 2x^2 - 2x^2 \cos 120^\circ = 3x^2 \Rightarrow AC = x\sqrt{3}.$$

Vì $\triangle BMC$ vuông tại M nên: $BC = \sqrt{MB^2 + MC^2} = x\sqrt{2}$.

Mặt khác $AB^2 + BC^2 = x^2 + (x\sqrt{2})^2 = 3x^2 = (x\sqrt{3})^2 = AC^2$ nên $\triangle ABC$ vuông tại B .

Gọi H là trung điểm của AC thì H là tâm của đường tròn (C) và ba điểm H, I, M thẳng hàng.

Do $\widehat{AMC} = 120^\circ$ nên $\widehat{AIC} = 60^\circ$, suy ra $\triangle AIC$ đều và $AC = IA = IC = R = 4\sqrt{3}$.

Suy ra $x\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow x = 4$ và $IA = IM \cos 30^\circ \Leftrightarrow IM = \frac{2IA}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 8$.

Điểm $M \in d$ nên $M(-1+t; 2+t; 3+\sqrt{2}t) \Rightarrow IM^2 = t^2 + t^2 + (\sqrt{2}t)^2 = 4t^2$.

Mà $IM^2 = 64 \Leftrightarrow 4t^2 = 64 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \Rightarrow M(3; 6; 3+4\sqrt{2}) \\ t = -4 \Rightarrow M(-5; -2; 3-4\sqrt{2}) \end{cases} (l)$

Vì $x_M > 0$ nên điểm cần tìm là $M(3; 6; 3+4\sqrt{2})$, suy ra $Q = 6 - 4\sqrt{2}$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 3a$, góc $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{6}$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a .

A. $108\pi a^3$.

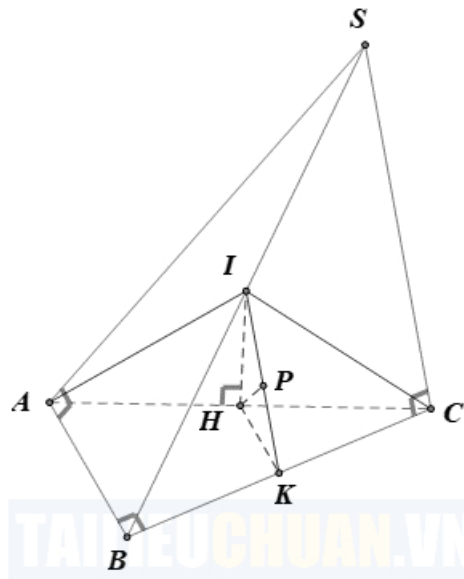
B. $36\pi a^3$.

C. $6\pi a^3$.

D. $36\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I, H lần lượt là trung điểm của cạnh SB và AC

Mặt khác, theo giả thiết ta có $\triangle SAB, \triangle SCB$ lần lượt là các tam giác vuông tại A và C
 $\Rightarrow IA = IB = IC = IS$

$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

Mặt khác: $\triangle ABC$ vuông tại $B \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

$\Rightarrow IH \perp (ABC)$

Ta có: $\frac{d(A; (SBC))}{d(H; (SBC))} = \frac{AC}{HC} = 2 \Rightarrow d(H; (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Gọi K là trung điểm của cạnh $BC \Rightarrow HK \perp BC$ ($HK \parallel AB, AB \perp BC$)

Lại có: $BC \perp IH$ ($IH \perp (ABC) \Rightarrow BC \perp (IHK)$)

Mặt khác: $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (IHK)$ theo giao tuyến IK

Trong (IHK) , gọi $HP \perp IK \Rightarrow HP \perp (SBC)$ tại $P \Rightarrow HP = d(H; (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

$$\text{Xét } \triangle IHK: \frac{1}{HP^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{\frac{AB^2}{4}} \Rightarrow HI = \frac{3\sqrt{2}a}{2}$$

$$\text{Xét } \triangle IHB: IB = \sqrt{IH^2 + HB^2} = 3a = R. \text{ Vậy } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi a^3$$

Câu 47: Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\left| (z_1 - 2 - i)(2 + 2\sqrt{3}i) \right| = \left| (z_1 - \bar{z}_1)(\sqrt{3} - i) \right|$ và $|z_2 + i| = |z_2 + 1 + 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ bằng:

A. $\sqrt{7}$

B. $2\sqrt{6}$

C. $\frac{34}{5}$

D. $2\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z_1 .

Từ giả thuyết, suy ra,

$$\begin{aligned} |(z_1 - 2 - i) \cdot (2 + 2\sqrt{3}i)| &= |(z_1 - \bar{z}_1)(\sqrt{3} - i)| \Leftrightarrow 2|(z_1 - 2 - i)| = |(z_1 - \bar{z}_1)| \\ \Leftrightarrow 2|(x - 2) + (y - 1)i| &= |2yi| \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2y + 5 = 0 \end{aligned}$$

Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z_2 là parabol (P) có phương trình $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2}$.

Gọi $N(a; b)$ là điểm biểu diễn cho số phức z_2 .

Từ giả thuyết, suy ra

$$|z_2 + i| = |z_2 + 1 + 2i| \Leftrightarrow |a + (b + 1)i| = |(a + 1) + (b + 2)i| \Leftrightarrow a^2 + (b + 1)^2 = (a + 1)^2 + (b + 2)^2$$

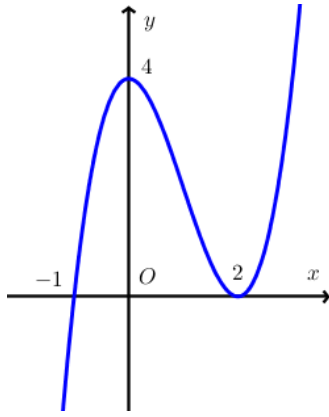
$2a + 2b + 4 = 0 \Leftrightarrow a + b + 2 = 0$. Suy ra tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z_2 là đường thẳng có phương trình $a + b + 2 = 0$.

$$\text{Khi đó } |z_1 - z_2| = MN. \text{ Điểm } M \in (P) \Rightarrow M\left(x; \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2}\right)$$

$$\text{Khoảng cách } MN_{\min} = d(M, \Delta)_{\min} = \frac{\left|x + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2} + 2\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{9}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{9}{2}\right).$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{9}{2}\right)$ bằng $2\sqrt{2}$, dấu “=” xảy ra khi $x = 1$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng với hàm số $y = |x - 2| \cdot (x^2 - x - 2)$.



A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

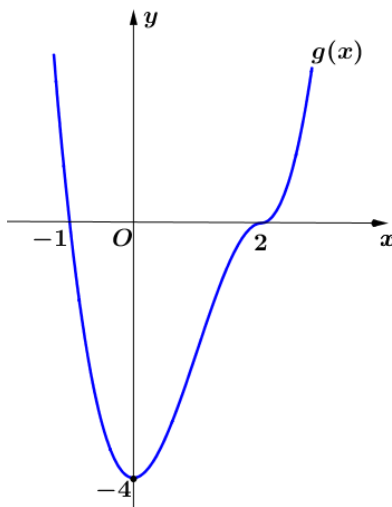
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét hàm số } y = g(x) = |x-2| \cdot (x^2 - x - 2) = \begin{cases} (x-2) \cdot (x^2 - x - 2) & \text{khi } x \geq 2 \\ -(x-2) \cdot (x^2 - x - 2) & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

Từ đó ta có đồ thị hàm số $g(x)$ như sau:



Từ đồ thị suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0) \supset \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$

Do đó hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

Câu 49: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn $\log_5(x^2 + y) \geq \log_4(x + y)$?

A. 37 .

B. 38.

C. 40 .

D. 36.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x + y > 0$ và $x^2 + y > 0$. Khi đó

$$\log_5(x^2 + y) \geq \log_4(x + y) \Leftrightarrow x^2 + y \geq 5^{\log_4(x+y)} \Leftrightarrow x^2 + y \geq (x + y)^{\log_4 5}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x \geq (x + y)^{\log_4 5} - (x + y) \quad (1)$$

Đặt $t = x + y$ thì (1) được viết lại là $x^2 - x \geq t^{\log_4 5} - t \quad (2)$

Với mỗi x nguyên cho trước có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn bất phương trình (1)

Tương đương với bất phương trình (2) có không quá 255 nghiệm t .

Ta có hàm số $f(t) = t^{\log_4 5} - t$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ nên nếu $x^2 - x > 256^{\log_4 5} - 256 = 369$ thì sẽ có ít nhất 256 nghiệm nguyên $t \geq 1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $x^2 - x \leq 369 \Leftrightarrow -18 \leq x \leq 19$ (do x nguyên).

Vậy có tất cả 38 số nguyên x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 50: Có bao nhiêu số nguyên dương a để phương trình $z^2 - (a + 3)z + a^2 - a = 0$ có 2 nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$z^2 - (a + 3)z + a^2 - a = 0. \Delta = -3a^2 + 10a + 9.$$

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3a^2 + 10a + 9 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5 - 2\sqrt{13}}{2} \leq a \leq \frac{5 + 2\sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Khi đó phương trình có 2 nghiệm } z_1 = \frac{a + 3 - \sqrt{-3a^2 + 10a + 9}}{2}, z_2 = \frac{a + 3 + \sqrt{-3a^2 + 10a + 9}}{2}$$

$$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |3 + a| = \left| \frac{\sqrt{-3a^2 + 10a + 9}}{2} \right| \Leftrightarrow |3 + a| = \left| \frac{\sqrt{-3a^2 + 10a + 9}}{2} \right|$$

$$(3 + a)^2 = -3a^2 + 10a + 9 \Leftrightarrow 4a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}.$$

$a = 1$ thỏa mãn.

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow -3a^2 + 10a + 9 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{5 + 2\sqrt{13}}{2} \\ a < \frac{5 - 2\sqrt{13}}{2} \end{cases}. (1)$$

$$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |3 + a| = \left| \frac{i\sqrt{3a^2 - 10a - 9}}{2} \right| \Leftrightarrow |3 + a| = \left| \frac{i\sqrt{3a^2 - 10a - 9}}{2} \right|$$

$$(3 + a)^2 = 3a^2 - 10a - 9 \Leftrightarrow a^2 - 8a - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 9 \end{cases}$$

$a = -1$ loại vì không phải là số nguyên dương, $a = 9$ thỏa mãn (1).

Vậy có 2 giá trị