

Lý thuyết và bài tập về cấp số cộng

Cùng đi sâu tìm hiểu về định nghĩa, tính chất và các dạng bài tập thường gặp của *cấp số cộng* qua bài viết dưới đây.

Định nghĩa về cấp số cộng

Cấp số cộng là một dãy số thoả mãn điều kiện: hai phần tử liên tiếp nhau sai khác nhau một hằng số. Hằng số sai khác chung được gọi là **công sai** của cấp số cộng. Các phần tử của nó cũng được gọi là các số hạng.

a_n là cấp số cộng nếu $a_{n+1} = a_n + d$ với $\forall n \in N^*$, d là hằng số

Tính chất

Nếu a_n là cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ 2, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề bên nó trong dãy số, tức là:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ (với } k \geq 2)$$

Số hạng tổng quát của cấp số cộng

Nếu cấp số cộng khởi đầu là phần tử a_1 và công sai là d , thì số hạng thứ n của cấp số cộng được tính theo công thức:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \text{ (với } n \geq 2)$$

Tổng n số hạng đầu

Giả sử a_n là một cấp số cộng. Với mỗi số nguyên dương n , gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của nó $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ khi đó ta có công thức:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

Khi chứng minh công thức này, tổng riêng này được tách thành tổng của a_1 với a_n , của a_2 với a_{n-1}, \dots

Chứng minh

Công thức cấp số cộng và các dạng bài tập thường gặp

$$S_n = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \dots + a_1 + (n-2)d + a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = a_n - (n-1)d + a_n - (n-2)d + \dots + a_n - 2d + a_n - d + a_n$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

Bài tập về cấp số cộng

Câu 1. (Trích từ [Đề thi thử TN THPT 2020 môn Toán lần 2 trường ĐHQGHN](#))

Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2, u_2 = 6$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng:

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

Đ.a: B

Câu 2.

Cho các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng? Tính số hạng đầu và công sai của dãy số?

a. $u_n = 5 - 3n$

b. $u_n = \frac{n}{2} - 1$

c. $u_n = 3n$

Giải

a. Ta có $u_{n+1} - u_n = 5 - 3(n+1) - (5 - 3n) = -3, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy u_n là cấp số cộng có $u_1 = 2$, công sai $d = -3$

b. Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2} - 1 - (\frac{n}{2} - 1) = \frac{1}{2}; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy u_n là cấp số cộng có $u_1 = -\frac{1}{2}$, công sai $d = \frac{1}{2}$

c. Ta có $u_{n+1} - u_n = 3^{n+1} - 3 = 2 \cdot 3^n$

Vậy u_n không phải là cấp số cộng.

Câu 3.

Công thức cấp số cộng và các dạng bài tập thường gặp

Xác định a để 3 số: $1 + 3a$; $a^2 + 5$; $1 - a$ theo thứ tự lập thành 1 cấp số cộng

Giải

3 số: $1 + 3a$; $a^2 + 5$; $1 - a$ theo thứ tự lập thành 1 cấp số cộng khi và chỉ khi:

$$a^2 + 5 - (1 + 3a) = 1 - a - (a^2 + 5)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3a + 4 = -a^2 - a - 4$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a + 4 = 0 \text{ (PT vô nghiệm)}$$

Vậy không có giá trị nào của a thỏa mãn đề bài.

~/~

Hy vọng với nội dung về **Công thức cấp số cộng và các dạng bài tập thường gặp** trên đây giúp các em học tốt môn Toán trong chương trình học THPT!