

Mã đề thi: 132

Họ và tên thí sinh SBD:.....

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

$-\infty \nearrow 3 \searrow -1 \nearrow +\infty$

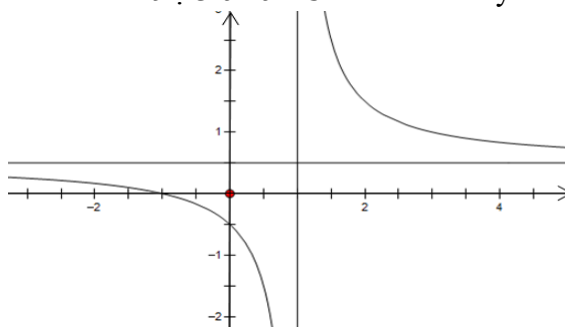
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1;3)$. B. $(-\infty;-1)$. C. $(-1;1)$. D. $(-1;2)$.

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và công bội $q = 6$. Giá trị của u_2 bằng

- A. 8. B. 36. C. 3. D. 12.

Câu 3. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A. $y = \frac{x+1}{2x-2}$. B. $y = x^3 - 3x + 2$. C. $y = x^4 - 2x^2 - 3$. D. $y = -x^3 + 3x - 1$.

Câu 4. Với a là số thực dương và $a \neq 1$, khi đó $\log_a(a^2)$ bằng

- A. 3. B. a . C. 2. D. 1.

Câu 5. Biết $\int_1^5 f(x)dx = 6$, $\int_1^5 g(x)dx = -2$. Giá trị của $\int_1^5 [f(x) - g(x)]dx$ bằng

- A. 8. B. -12. C. -3. D. 4.

Câu 6. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ là đường thẳng

- A. $y = 2$. B. $y = 1$. C. $x = 2$. D. $x = -2$.

Câu 7. Số giao điểm của hai đồ thị $y = x^3 - 2x + 1$ và $y = x^2 + x + 1$ là

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 8. Đạo hàm của hàm số $y = 2021^x$ là

- A. $y' = \frac{2021^x}{\ln 2021}$. B. $y' = 2021^x \ln 2021$. C. $y' = x \cdot 2021^x$. D. $y' = 2021^x$.

Câu 9. Cho a là số thực dương tùy ý, viết biểu thức $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^3}$ về dạng lũy thừa của a là

- A. a^2 . B. $a^{\frac{7}{3}}$. C. $a^{\frac{2}{9}}$. D. $a^{\frac{11}{3}}$.

Câu 10. Trong các số phức sau, số phức nào là số thuần ảo?

- A. $z = 4$. B. $z = -3 + \sqrt{3}i$. C. $z = 2 - i$. D. $z = -i$.

Câu 11. Lớp 12A1 có 35 học sinh. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 em làm cán bộ lớp, trong đó 1 em làm bí thư, 1 em làm lớp trưởng, 1 em làm lớp phó, biết rằng 35 em đều có khả năng như nhau?

- A. 35^3 . B. A_{35}^3 . C. C_{35}^3 . D. $3!$.

Câu 12. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + e^x$ là

- A. $x^2 + e^x + C$. B. $2x^2 + e^x + C$. C. $1 + e^x + C$. D. $\frac{1}{2}x^2 + e^x + C$.

Câu 13. Cho $F(x) = \int x \cos x dx$. Khi đó $F(x)$ bằng

- A. $x \sin x + \cos x + C$. B. $x \sin x + C$. C. $x \cos x + C$. D. $x \sin x - \cos x + C$.

Câu 14. Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 27$ là

- A. $x = 5$. B. $x = 1$. C. $x = 2$. D. $x = 4$.

Câu 15. Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1) = 2$ là

- A. $x = 4$. B. $x = 2$. C. $x = 5$. D. $x = 3$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	1	-2	1	$-\infty$

Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 17. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

- A. -1 . B. 0 . C. 1 . D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = x(x-1)$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 19. Tính thể tích của khối chóp có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $3a$.

- A. $3a^3$. B. $9a^3$. C. a^3 . D. $3a^2$.

Câu 20. Cho số phức $z = 20i - 21$. Môđun của số phức z bằng

- A. $|z| = 20$. B. $|z| = \sqrt{29}$. C. $|z| = 29$. D. $|z| = 841$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = 5 \end{cases}$. Véc tơ nào sau đây là véc tơ chỉ

phương của đường thẳng d ?

- A. $\vec{u} = (3; -2; 5)$. B. $\vec{u} = (-3; 2; -5)$. C. $\vec{u} = (-1; 3; 5)$. D. $\vec{u} = (-1; 3; 0)$.

Câu 22. Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy là a , độ dài đường sinh là $3a$. Khi đó thể tích của khối trụ là

- A. $3\pi a^3$. B. $\frac{\pi a^3}{2}$. C. πa^3 . D. $\frac{\pi a^3}{6}$.

Câu 23. Một khối lăng trụ có diện tích đáy bằng 7 cm^2 , chiều cao bằng 3 cm . Thể tích khối lăng trụ đó bằng

- A. 21 cm^3 . B. 63 cm^3 . C. 7 cm^3 . D. 147 cm^3 .

Câu 24. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 4i$ và $z_2 = 2 + i$. Tìm số phức $w = 2z_1 - 3z_2$.

- A. $w = -4 + 11i$. B. $w = -4 - 11i$. C. $w = 4 + 11i$. D. $w = 4 - 11i$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z + 5 = 0$. Mặt cầu (S) có tọa độ tâm I là

- A. $I(-1; -3; 2)$. B. $I(2; 6; -4)$. C. $I(1; 3; -2)$. D. $I(-2; -6; 4)$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 2; -3)$, $B(-2; 1; -1)$. Tọa độ của $\overrightarrow{AB}$ là.

- A. $\overrightarrow{AB} = (3; -1; -2)$ B. $\overrightarrow{AB} = (-3; 1; 2)$ C. $\overrightarrow{AB} = (-3; 1; -2)$ D. $\overrightarrow{AB} = (-3; -1; 2)$

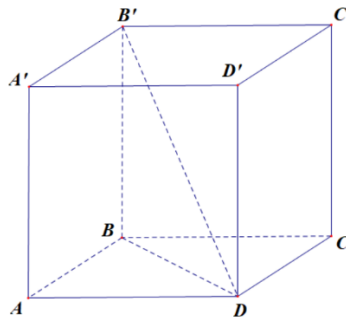
Câu 27. Một mặt cầu có diện tích là 2π thì có bán kính bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 28. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 12x$ trên đoạn $[0; 3]$. Giá trị $M - m$ bằng

- A. 4. B. 16. C. 64. D. 32.

Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $2a$ (tham khảo hình bên). Tang của góc giữa đường thẳng $B'D$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



- A. $\sqrt{2}$. B. 2. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $16^x - 5.4^x + 4 \geq 0$ là:

- A. $T = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$. B. $T = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.
C. $T = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. D. $T = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-4; 2; 1)$ và $B(2; 4; 5)$. Mặt cầu (S) có đường kính AB có phương trình là

- A. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 14$. B. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 56$.
C. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 56$. D. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 14$.

Câu 32. Cho số phức z thỏa mãn $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$. Tính tích phần thực và phần ảo của số phức z .

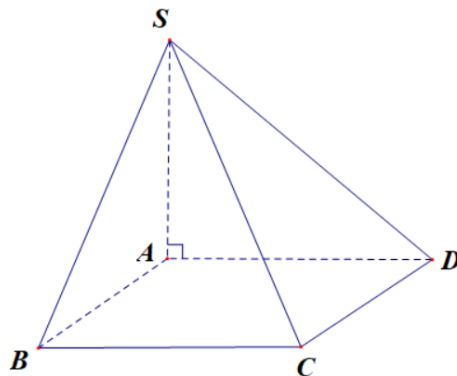
- A. -2. B. 2. C. -1. D. 1.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1; 2; -1)$ và song song với đường thẳng

$$d: \begin{cases} x=1-t \\ y=5+2t \\ z=2+3t \end{cases} \text{ có phương trình tham số là}$$

A. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+2t \\ z=3-t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=-1+3t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=1+3t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=-1+3t \end{cases}$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = 2a\sqrt{3}$ vuông góc với đáy (tham khảo hình bên). Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) .



A. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$. B. $\frac{a\sqrt{39}}{2}$. C. $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. D. $\frac{2a}{13}$.

Câu 35. Cho tích phân $\int_0^1 (x-2)e^x dx = a + be$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tổng $a + b$ bằng

A. 1. B. -1. C. 5. D. -3.

Câu 36. Cho hàm số: $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

- A. Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại $x = 1$.
 B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.
 D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

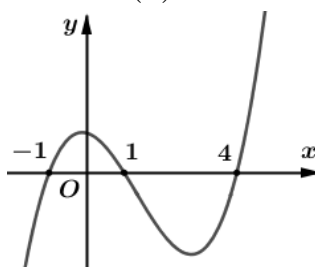
Câu 37. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(2; -2; 5)$; $B(-4; 6; 3)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là:

A. $3x - 4y + z - 7 = 0$. B. $3x - 4y + z + 7 = 0$. C. $3x - 4y + z - 19 = 0$. D. $x + y + z - 5 = 0$.

Câu 38. Cho 20 thẻ được đánh số lần lượt từ 1 đến 20. Rút ngẫu nhiên hai thẻ. Tính xác suất để tổng hai số được ghi trên hai thẻ là số chẵn.

A. $\frac{9}{19}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{9}{38}$. D. $\frac{10}{19}$.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Câu 40. Trong không gian, cho mặt phẳng $(P): x+3y-2z+2=0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{1}$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;2;-1)$, cắt mặt phẳng (P) và đường thẳng d lần lượt tại B và C sao cho C là trung điểm AB là

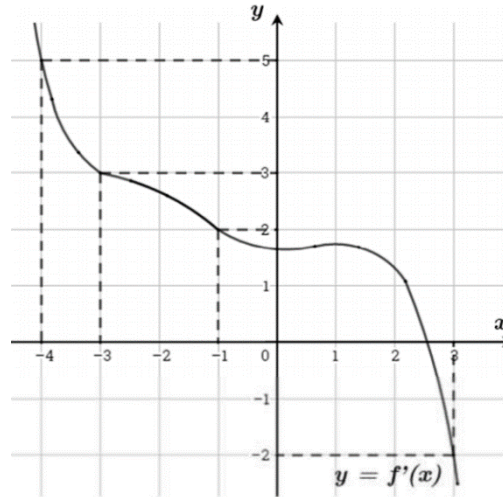
A. $\begin{cases} x = -17 + 18t \\ y = 5 + 3t \\ z = t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 - 18t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 18t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -17 + 18t \\ y = 5 - 3t \\ z = -t \end{cases}$

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Trên đoạn $[-4;3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm nào?

A. $x = -4$.B. $x = -3$.C. $x = 3$.D. $x = -1$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm cạnh AD , cạnh bên SB hợp với đáy một góc 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{2}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{4}$.

Câu 43. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z| = 5$ và $z(2+i)(1-2i)$ là một số thực. Tính $P = |a| + |b|$.

A. $P = 7$ B. $P = 4$ C. $P = 8$ D. $P = 5$

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin 2x \cdot f(2\sin^3 x) dx$ bằng

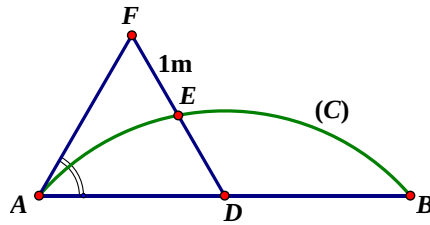
A. $\frac{5}{3}$.

B. 3.

C. $\frac{13}{3}$.

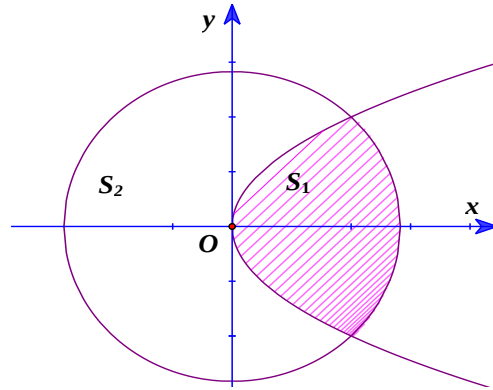
D. $\frac{13}{9}$.

Câu 45. Mặt tiền nhà ông An có chiều ngang $AB = 4m$, ông An muốn thiết kế lan can nhô ra có dạng là một phần của đường tròn (C) (hình vẽ). Vì phía trước vướng cây tại vị trí F nên để an toàn, ông An cho xây lan can là cung tròn đi qua điểm E cách D một khoảng là $1m$ (D là trung điểm của AB). Biết $AF = 2m$, $DAF = 60^\circ$ và lan can cao $1m$ làm bằng inox với giá $2,2$ triệu/ m^2 . Tính số tiền ông An phải trả (làm tròn đến hàng ngàn).



- A. 8,124,000. B. 9,977,000. C. 10,405,000. D. 7,568,000.

Câu 46. Biết rằng parabol $(P): y^2 = 2x$ chia đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$ thành hai phần lần lượt có diện tích là S_1, S_2 (như hình vẽ). Khi đó $S_2 - S_1 = a\pi - \frac{b}{c}$ với a, b, c nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c$.



- A. $S = 13$. B. $S = 15$ C. $S = 14$. D. $S = 16$.

Câu 47. Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $|(2+i)z - (1-2i)z| = |1+3i|$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tính $M = |2z_1 + 3z_2|$.

- A. $M = \sqrt{19}$. B. $M = 5$. C. $M = 19$. D. $M = 25$.

Câu 48. Cho $0 \leq x, y \leq 1$ thỏa mãn $2020^{1-x-y} = \frac{x^2 + 2021}{y^2 - 2y + 2022}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$. Khi đó $M + m$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{391}{16}$. B. $\frac{136}{3}$. C. $\frac{25}{2}$. D. $\frac{383}{16}$.

Câu 49. Tìm tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $\log_{2021}(x+y) \leq 0$ và $x+y+\sqrt{2xy+m} \geq 1$

- A. $m = -\frac{1}{3}$. B. $m = 2$. C. $m = -\frac{1}{2}$. D. $m = 0$.

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất. Khi đó:

- A. $a + b + c = 8$. B. $a + b + c = 6$. C. $a + b + c = 5$. D. $a + b + c = 7$.

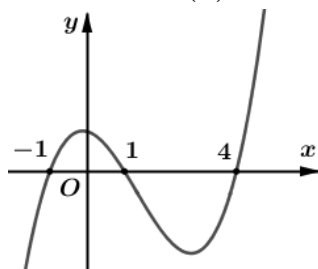
----- HẾT -----

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.D	3.A	4.C	5.A	6.C	7.D	8.B	9.B	10.D
11.B	12.D	13.A	14.B	15.D	16.B	17.C	18.C	19.C	20.C
21.D	22.A	23.A	24.B	25.C	26.D	27.D	28.B	29.C	30.C
31.D	32.A	33.B	34.C	35.A	36.D	37.B	38.A	39.B	40.D
41.D	42.A	43.A	44.D	45.B	46.B	47.A	48.A	49.C	50.D

LỜI GIẢI CHI TIẾT CÁC CÂU VD – VDC

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$ là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt, suy ra hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Ta có $g'(x) = 2f'(x) \cdot e^{2f(x)+1} + f'(x) \cdot 5^{f(x)} \cdot \ln 5 = f'(x) \cdot [2e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)} \cdot \ln 5]$.

Vì $2e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)} \cdot \ln 5 > 0$ với mọi x nên $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$.

Suy ra số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Câu 40. Trong không gian, cho mặt phẳng $(P): x + 3y - 2z + 2 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{1}$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;2;-1)$, cắt mặt phẳng (P) và đường thẳng d lần lượt tại B và C sao cho C là trung điểm AB là

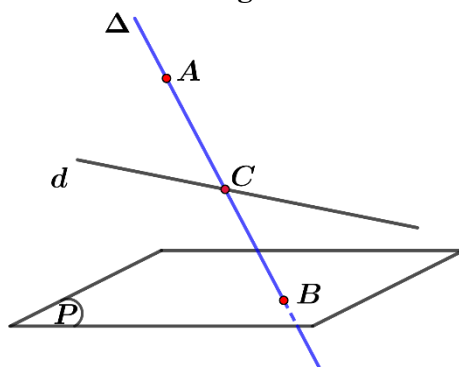
A. $\begin{cases} x = 1 + 18t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -17 + 18t \\ y = 5 + 3t \\ z = t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 - 18t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -17 + 18t \\ y = 5 - 3t \\ z = -t \end{cases}$

Lời giải



Từ giả thiết ta có: $C \in d \Rightarrow C(1+2t; -1-t; 4+t)$.

Do C là trung điểm của $AB \Rightarrow B(4t+1; -2t-4; 2t+9)$.

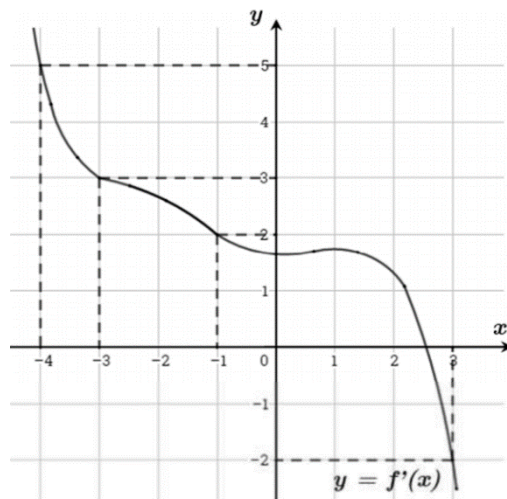
Ta có: $\Delta \cap (P) = B \Rightarrow B \in (P) \Rightarrow 4t+1+3(-2t-4)-2(2t+9)+2=0 \Leftrightarrow t = -\frac{9}{2}$.

Suy ra $B(-17; 5; 0)$. Đường thẳng Δ đi qua hai điểm B và A .

Khi đó vector chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{BA} = (18; -3; -1)$.

Vậy phương trình tham số của Δ : $\begin{cases} x = -17 + 18t \\ y = 5 - 3t \\ z = -t \end{cases}$.

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Trên $[-4;3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm nào?



A. $x = -1$.

B. $x = 3$.

C. $x = -4$.

D. $x = -3$.

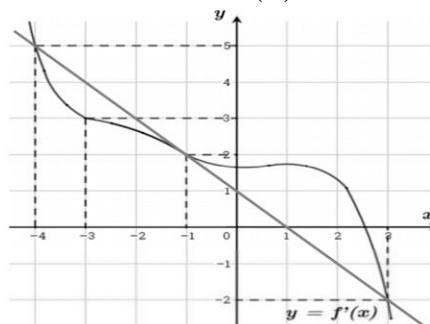
Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ trên $[-4;3]$.

Ta có: $g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - x$. Trên đồ thị hàm số $f'(x)$ ta vẽ thêm đường thẳng $y = 1 - x$.



Từ đồ thị ta thấy $f'(x) = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	-4	-1	3
$g'(x)$	0	-	0
$g(x)$	$g(-4)$	$g(-1)$	$g(3)$

Vậy $\min_{[-4;3]} g(x) = g(-1) \Leftrightarrow x = -1$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm cạnh AD , cạnh bên SB hợp với đáy một góc 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{2}$.

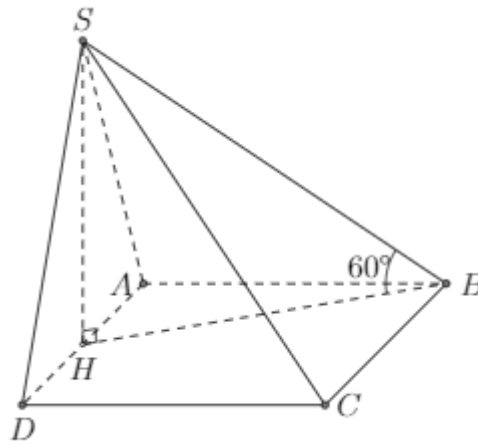
B. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{4}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow BH$ là hình chiếu vuông góc của SB trên $(ABCD)$.

$$\Rightarrow \angle SBH = (\angle SB, (ABCD)) = 60^\circ.$$

$$\triangle ABH \text{ vuông tại } A \Rightarrow BH = \sqrt{AB^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\triangle SBH \text{ vuông tại } H \Rightarrow SH = HB \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{15}}{6}.$$

Câu 43. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z| = 5$ và $z(2+i)(1-2i)$ là một số thực. Tính $P = |a| + |b|$.

A. $P = 8$

B. $P = 4$

C. $P = 5$

D. $P = 7$

Lời giải

Ta có $z(2+i)(1-2i) = (a+bi)(4-3i) = 4a+3b+(-3a+4b)i$. (1)

Do $z(2+i)(1-2i)$ là một số thực nên từ (1) suy ra $-3a+4b=0 \Leftrightarrow b = \frac{3}{4}a$. (2)

Mặt khác $|z| = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 25$. (3)

Thế (2) vào (3) ta được phương trình $a^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow a = \pm 4$.

Với $a = 4 \Rightarrow b = 3$ và $a = -4 \Rightarrow b = -3$.

Vậy $P = |a| + |b| = 3 + 4 = 7$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin 2x \cdot f(2\sin^3 x) dx$ bằng

A. $\frac{13}{9}$.

B. $\frac{5}{3}$.

C. 3.

D. $\frac{13}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2\sin^3 x$

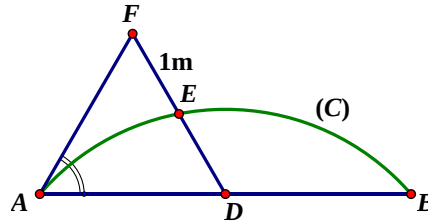
$\Rightarrow dt = 2 \cdot 3\sin^2 x \cdot \cos x dx$

$\Leftrightarrow dt = 3\sin 2x \cdot \sin x dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin 2x \cdot f(2 \sin^3 x) dx = \frac{1}{3} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^2 f(x) dx$$

$$= \frac{1}{3} \left[\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \right] = \frac{1}{3} \left[\int_0^1 (2x) dx + \int_1^2 (x^2 + 1) dx \right] = \frac{13}{9}.$$

Câu 45. Mặt tiền nhà ông An có chiều ngang $AB = 4m$, ông An muốn thiết kế lan can nhô ra có dạng là một phần của đường tròn (C) (hình vẽ). Vì phía trước vương cây tại vị trí F nên để an toàn, ông An xây lan can là cung tròn đi qua điểm E cách D một khoảng là $1m$ (D là trung điểm của AB). Biết $AF = 2m$, $DAF = 60^\circ$ và lan can cao $1m$ làm bằng inox với giá $2,2$ triệu/ m^2 . Tính số tiền ông An phải trả (làm tròn đến hàng ngàn).



- A. 7,568,000. B. 10,405,000. C. 9,977,000. D. 8,124,000.

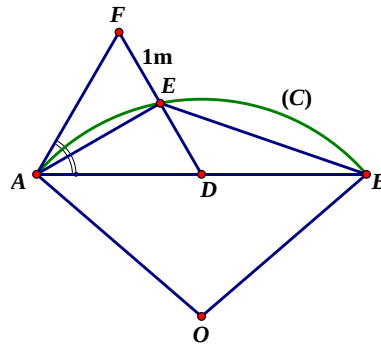
Lời giải

Theo giả thiết, ta có $\triangle AFD$ đều nên $FD = 2m$ suy ra $ED = 1m$, $EAD = 30^\circ$ và $EDB = 120^\circ$.

Trong tam giác $\triangle EDB$ có $EB^2 = DE^2 + DB^2 - 2DE \cdot DB \cdot \cos 120^\circ = 7$.

Gọi R là bán kính của đường tròn (C) tâm O , áp dụng định lý sin trong tam giác $\triangle AEB$ ta có

$$\frac{EB}{\sin EAD} = 2R, \text{ suy ra } R = \sqrt{7}.$$

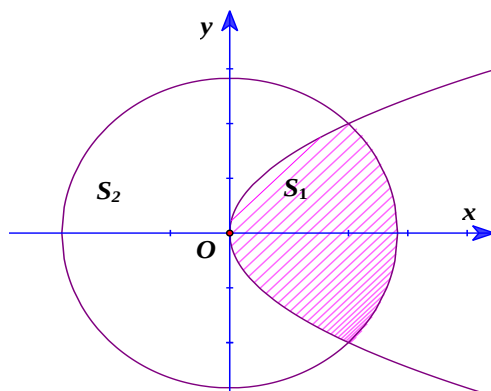


Xét tam giác OAB có $R = OA = OB = \sqrt{7}$, $AB = 4$, suy ra $\cos AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = -\frac{1}{7}$.

Khi đó $AOB \approx 98,2^\circ$, suy ra độ dài cung (C) xấp xỉ $4,54m$.

Vì chiều cao của lan can là $1m$ và giá kính là $2,2$ triệu/ m^2 nên số tiền ông An phải trả xấp xỉ $9,977,000$ đ.

Câu 46. Biết rằng parabol $(P): y^2 = 2x$ chia đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$ thành hai phần lần lượt có diện tích là S_1, S_2 (như hình vẽ). Khi đó $S_2 - S_1 = a\pi - \frac{b}{c}$ với a, b, c nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c$.



A. $S = 13$.

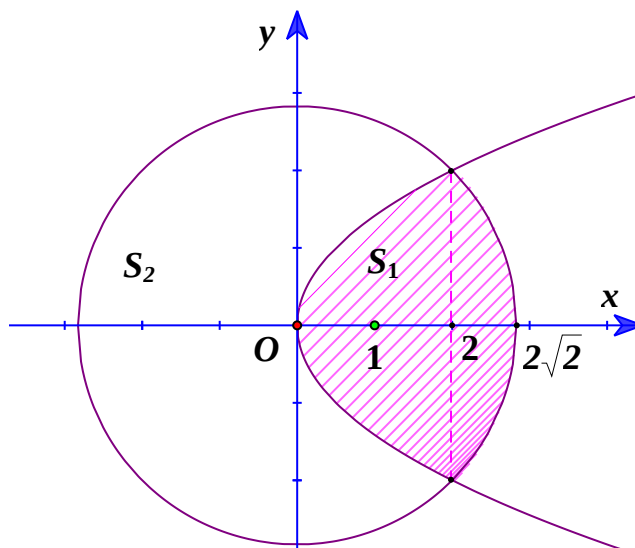
B. $S = 16$.

C. $S = 15$

D. $S = 14$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Xét hệ } \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 8 = 0 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \vee x = 2 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y^2 = 4 \end{cases}.$$

$$S_1 = 2 \int_0^2 \sqrt{2x} dx + 2 \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2} dx$$

$$I_1 = 2 \int_0^2 \sqrt{2x} dx = \left(2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

$$I_2 = 2 \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2} dx$$

$$\text{Đặt } x = 2\sqrt{2} \cos t \Rightarrow dx = -2\sqrt{2} \sin t dt$$

$$x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}, \quad x = 2\sqrt{2} \Rightarrow t = 0.$$

$$I_2 = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \sqrt{8 - 8 \cos^2 t} (-2\sqrt{2} \sin t dt) = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt = 8 \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi - 4$$

$$\Rightarrow S_1 = I_1 + I_2 = 2\pi + \frac{4}{3}.$$

$$\Rightarrow S_2 = \pi (2\sqrt{2})^2 - S_1 = 6\pi - \frac{4}{3}.$$

$$\Rightarrow S_2 - S_1 = 4\pi - \frac{8}{3}.$$

$$\text{Vậy } a = 4, b = 8, c = 3 \Rightarrow S = a + b + c = 15.$$

Câu 47. Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $|(2+i)|z - (1-2i)z| = |1+3i|$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tính $M = |2z_1 + 3z_2|$.

- A.** $M = 19$. **B.** $M = 25$. **C.** $M = 5$. **D.** $M = \sqrt{19}$.

Lời giải

Chọn D

Ta chia cả hai vế cho $|2+i|$ và được $|z|z + iz| = |1+i| = \sqrt{2}$. Đặt $|z| = m \geq 0$ thì ta có $m|m+i| = \sqrt{2} \Rightarrow m^2(m^2+1) = 2 \Rightarrow m = 1$ hay ta có $|z| = 1$, nói cách khác hai số z_1, z_2 cùng thuộc đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$. Gọi A, B biểu diễn các số z_1, z_2 thì từ $|z_1 - z_2| = 1$ suy ra OAB là tam giác đều. Không giảm tổng quát chọn $A(1;0), B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\text{Thì } M = \left| 2(1+0i) + 3\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \right| = \left| \frac{7+i3\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{19}.$$

Câu 48. Cho $0 \leq x, y \leq 1$ thỏa mãn $2020^{1-x-y} = \frac{x^2+2021}{y^2-2y+2022}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2+3y)(4y^2+3x) + 25xy$. Khi đó $M+m$ bằng bao nhiêu?

- A.** $\frac{136}{3}$. **B.** $\frac{391}{16}$. **C.** $\frac{383}{16}$. **D.** $\frac{25}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 2020^{1-x-y} = \frac{x^2+2021}{y^2-2y+2022} \Leftrightarrow \frac{2020^{1-y}}{2020^x} = \frac{x^2+2021}{(1-y)^2+2021}$$

$$2020^x(x^2+2021) = 2020^{1-y}[(1-y)^2+2021] \Leftrightarrow f(x) = f(1-y)$$

Xét hàm số $f(t) = 2020^t(t^2+2021) = t^2 \cdot 2020^t + 2021 \cdot 2020^t$, có

$$f'(t) = 2t \cdot 2020^t + t^2 \cdot 2020^t \cdot \ln 2020 + 2021 \cdot 2020^t \cdot \ln 2020 > 0; \forall t > 0$$

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$ mà $f(x) = f(1-y) \Rightarrow x+y=1$

Lại có

$$P = (4x^2+3y)(4y^2+3x) + 25xy = 16x^2y^2 + 12x^3 + 12y^3 + 34xy$$

$$\Rightarrow 16x^2y^2 + 12[(x+y)^3 - 3xy(x+y)] + 34xy = 16x^2y^2 + 12(1-3xy) + 34xy = 16x^2y^2 - 2xy + 12$$

Mà $1 = x+y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{4}$ nên đặt $t = xy \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$ khi đó $P = f(t) = 16t^2 - 2t + 12$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 16t^2 - 2t + 12 \text{ trên } \left[0; \frac{1}{4}\right] \text{ ta được } \begin{cases} m = \min_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{191}{16} \\ M = \max_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } M+m = \frac{191}{16} + \frac{25}{16} = \frac{391}{16}.$$

Câu 49. Tìm tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $\log_{2021}(x+y) \leq 0$ và $x+y+\sqrt{2xy+m} \geq 1$

- A.** $m = 2$. **B.** $m = -\frac{1}{3}$. **C.** $m = -\frac{1}{2}$. **D.** $m = 0$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện cần: Xét hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} \log_{2021}(x+y) \leq 0 & (1) \\ x+y+\sqrt{2xy+m} \geq 1 & (2) \end{cases}$$

$(x; y)$ là nghiệm hệ bất phương trình thì $(y; x)$ cũng là nghiệm của hệ bất phương trình. Do đó hệ có nghiệm duy nhất $\Rightarrow x = y$.

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow 0 < 2x \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2}$.

Với $0 < x \leq \frac{1}{2}$; $(2) \Leftrightarrow 2x + \sqrt{2x^2 + m} \geq 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + m} \geq 1 - 2x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + m \geq 1 - 4x + 4x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 \leq m$$

Đặt $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

$f(x)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ nên $f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \quad \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Do đó hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Điều kiện đủ: Với $m = -\frac{1}{2}$, ta có hệ bất phương trình
$$\begin{cases} \log_{2021}(x+y) \leq 0 & (1) \\ x+y+\sqrt{2xy-\frac{1}{2}} \geq 1 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y \leq 1 \\ x+y+\sqrt{2xy-\frac{1}{2}} \geq 1 \end{cases}$$

Ta có $1 \leq x+y+\sqrt{2xy-\frac{1}{2}} \leq x+y+\sqrt{\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{1}{2}} \leq 1$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất. Khi đó:

A. $a+b+c=8$.

B. $a+b+c=5$.

C. $a+b+c=6$.

D. $a+b+c=7$.

Lời giải

Chọn D.

Mặt (S) cầu có tâm $I(1; 2; 3), R=3$.

$d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{4}{3} < R$ mặt phẳng cắt mặt cầu theo một đường tròn

Gọi $M(a; b; c)$ là điểm trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất.

Khi đó M thuộc đường thẳng Δ đi qua I và vuông góc với (P)

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \text{ Thay vào mặt cầu } (S) \Rightarrow (2t)^2 + (-2t)^2 + (t)^2 = 9 \Rightarrow 9t^2 = 9 \Rightarrow t = \pm 1$$

$$\text{Với } t=1 \Rightarrow M(3;0;4) \Rightarrow d(M;(P)) = \frac{|2.3-2.0+4+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{10}{3}$$

$$\text{Với } t=-1 \Rightarrow M(-1;4;2) \Rightarrow d(M;(P)) = \frac{|2.(-1)-2.4+2+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } M(3;0;4) \Rightarrow a+b+c=7.$$

_____ **HẾT** _____