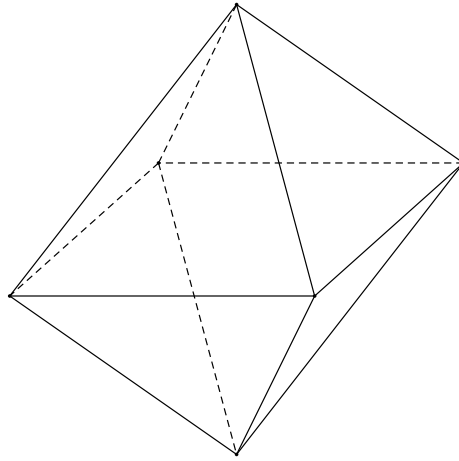


Câu 1: [2H1-1] Hình bát diện đều (tham khảo hình vẽ) có bao nhiêu mặt?



- A. 8. B. 9. C. 6. D. 4.

Câu 2: [2H3-1] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vec tơ $\vec{a}(1; -2; 0)$ và $\vec{b}(-2; 3; 1)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8$. B. $2\vec{a} = (2; -4; 0)$. C. $\vec{a} + \vec{b} = (-1; 1; -1)$. D. $|\vec{b}| = 14$.

Câu 3: [2D2-1] Cho các hàm số $y = \log_{2018} x$, $y = \left(\frac{\pi}{e}\right)^x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x$. Trong các hàm số trên có bao nhiêu hàm số nghịch biến trên tập xác định của hàm số đó.

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 4: [2D1-2] Hàm số $y = -\frac{x^4}{2} + 1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(-3; 4)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-\infty; 1)$.

Câu 5: [2D2-1] Cho các số thực $a < b < 0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|$. B. $\ln(\sqrt{ab}) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.
C. $\ln\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \ln(a^2) - \ln(b^2)$. D. $\ln(ab)^2 = \ln(a^2) + \ln(b^2)$.

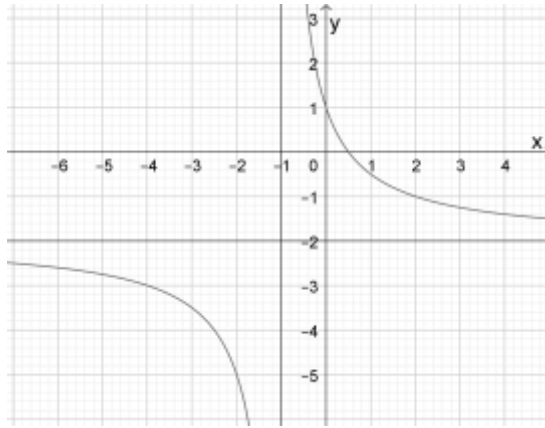
Câu 6: [2D1-2] Số đường tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^2}$ là bao nhiêu?

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 7: [1D4-1] Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2018}{2n+1}$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. 4. C. 2. D. 2018.

Câu 8: [2D1-2] Đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{1-2x}{x-1}$. B. $y = \frac{1-2x}{1-x}$. C. $y = \frac{1-2x}{x+1}$. D. $y = \frac{3-2x}{x+1}$.

Câu 9: [1D2-1] Cho A và B là hai biến cố xung khắc. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $P(A) + P(B) = 1$.
 B. Hai biến cố A và B không đồng thời xảy ra.
 C. Hai biến cố A và B đồng thời xảy ra.
 D. $P(A) + P(B) < 1$.

Câu 10: [2D3-1] Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(u)du = F(u) + C$.
 B. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ (k là hằng số và $k \neq 0$).
 C. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) = G(x)$.
 D. $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

Câu 11: [2H3-1] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): z - 2x + 3 = 0$. Một vector pháp tuyến của (P) là:

- A. $\vec{u} = (0; 1; -2)$. B. $\vec{v} = (1; -2; 3)$. C. $\vec{n} = (2; 0; -1)$. D. $\vec{w} = (1; -2; 0)$.

Câu 12: [2D4-1] Tính môđun của số phức $z = 3 + 4i$.

- A. 3. B. 5. C. 7. D. $\sqrt{7}$.

Câu 13: [2D3-1] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$) được xác định bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \int_b^a |f(x)|dx$. B. $S = \left| \int_b^a f(x)dx \right|$. C. $S = \int_b^a f(x)dx$. D. $S = \int_a^b |f(x)|dx$.

Câu 14: [2H2-1] Mặt phẳng chứa trục của một hình nón cắt hình nón theo thiết diện là:

- A. một hình chữ nhật. B. một tam giác cân. C. một đường elip. D. một đường tròn.

Câu 15: [2D1-3] Ta xác định được các số a , b , c để đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $(1; 0)$ và có điểm cực trị $(-2; 0)$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.

- A. 25. B. -1. C. 7. D. 14.

Câu 16: [2D3-1] Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x - \sin 2x$ là

A. $\frac{x^2}{2} + \cos 2x + C$. B. $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + C$. C. $x^2 + \frac{1}{2} \cos 2x + C$. D. $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x + C$.

Câu 17: [1D1-1] Cho các mệnh đề sau

- (I) Hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$ là hàm số chẵn.
(II) Hàm số $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$ có giá trị lớn nhất là 5.
(III) Hàm số $f(x) = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
(IV) Hàm số $f(x) = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 18: [2D1-3] Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx+16}{x+m}$ đồng biến trên $(0; 10)$.

- A. $m \in (-\infty; -10] \cup (4; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; -10] \cup [4; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$

Câu 19: [2H3-2] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; 0; -2)$ và mặt phẳng (P) có phương trình: $x + 2y - 2z + 4 = 0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

- A. $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$. B. $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 3$.
C. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 3$. D. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$.

Câu 20: [2D1-2] Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

- A. $m = 1, m = 3$. B. $m = 1$. C. $m = 3$. D. Không tồn tại m .

Câu 21: [1H1-1] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .

- A. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và tâm O đáy.
B. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BC .
C. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng AB .
D. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BD .

Câu 22: [2D1-1] Tập nghiệm của của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1-2x}{x} > 0$ là.

- A. $S = \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. B. $S = \left(0; \frac{1}{3}\right)$. C. $S = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. D. $S = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 23: [2D2-2] Gọi T là tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 6 = 0$. Tính T .

- A. $T = 5$. B. $T = -3$. C. $T = 36$. D. $T = \frac{1}{243}$.

Câu 24: [1H3-2] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a\sqrt{2}$ tính khoảng cách của hai đường thẳng CC' và BD .

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. C. a . D. $a\sqrt{2}$.

- Câu 25:** [2H3-1] Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm là $A(1;3;-1)$, $B(3;-1;5)$. Tìm tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$.
- A. $M\left(\frac{5}{3}; \frac{13}{3}; 1\right)$. B. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. C. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. D. $M(4; -3; 8)$.
- Câu 26:** [1D2-2] Giải bóng đá V-LEAGUE 2018 có tất cả 14 đội bóng tham gia, các đội bóng thi đấu vòng tròn 2 lượt (tức là hai đội A và B bất kỳ thi đấu với nhau hai trận, một trận trên sân của đội A, trận còn lại trên sân của đội B). Hỏi giải đấu có tất cả bao nhiêu trận đấu?
- A. 182. B. 91. C. 196. D. 140.
- Câu 27:** [1D2-2] Số đường chéo của đa giác đều có 20 cạnh là bao nhiêu?
- A. 170. B. 190. C. 360. D. 380.
- Câu 28:** [2D4-2] Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 2$, $z_2 = 4i$, $z_3 = 2 + 4i$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Tính diện tích tam giác ABC .
- A. 8. B. 2. C. 6. D. 4.
- Câu 29:** [2D1-3] Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m$ (với m là tham số thực). Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = -3$ tại bốn điểm phân biệt, trong đó có một điểm có hoành độ lớn hơn 2 còn ba điểm kia có hoành độ nhỏ hơn 1, là khoảng $(a; b)$ (với $a, b \in \mathbb{Q}$, a, b là phân số tối giản). Khi đó, $15ab$ nhận giá trị nào sau đây?
- A. -63. B. 63. C. 95. D. -95.
- Câu 30:** [2D2-3] Sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn theo công thức hàm số mũ $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$, $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t , T là chu kỳ bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Khi phân tích một mẫu gỗ từ công trình kiến trúc cổ, các nhà khoa học thấy rằng khối lượng cacbon phóng xạ $^{14}_6C$ trong mẫu gỗ đó đã mất 45% so với lượng $^{14}_6C$ ban đầu của nó. Hỏi công trình kiến trúc đó có niên đại khoảng bao nhiêu năm? Cho biết chu kỳ bán rã của $^{14}_6C$ là khoảng 5730 năm.
- A. 5157 (năm). B. 3561 (năm). C. 6601 (năm). D. 4942 (năm).
- Câu 31:** [2H3-3] Một tấm đề can hình chữ nhật được cuộn tròn lại theo chiều dài tạo thành một khối trụ có đường kính 50 (cm). Người ta trải ra 250 vòng để cắt chữ và in tranh cổ động, phần còn lại là một khối trụ có đường kính 45 (cm). Hỏi phần đã trải ra dài bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng đơn vị)?
- A. 373 (m). B. 187 (m). C. 384 (m). D. 192 (m).
- Câu 32:** [2H3-3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) có bán kính $r = 1$ và lần lượt có tâm là các điểm $A(0;3;-1)$, $B(-2;1;-1)$, $C(4;-1;-1)$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với cả ba mặt cầu trên. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất là
- A. $R = 2\sqrt{2} - 1$. B. $R = \sqrt{10}$. C. $R = 2\sqrt{2}$. D. $R = \sqrt{10} - 1$.
- Câu 33:** [2H3-3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường

thẳng (d) và khoảng cách từ đường thẳng d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- A. $x - y - 6 = 0$. B. $x + 3y + 2z + 10 = 0$. C. $x - 2y - 3z - 1 = 0$. D. $3x + z + 2 = 0$.

Câu 34: [1D2-3] Xếp ngẫu nhiên 8 chữ cái trong cụm từ ‘THANH HOA’ thành một hàng ngang. Tính xác suất để có ít nhất hai chữ H đứng cạnh nhau.

- A. $\frac{5}{14}$. B. $\frac{79}{84}$. C. $\frac{5}{84}$. D. $\frac{9}{14}$.

Câu 35: [1D1-2] Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos^3 2x - \cos^2 2x = m \sin^2 x$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$?

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 36: [2D3-3] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1$.

Tính tích phân $\int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx$.

- A. $I = 3$. B. $I = \frac{3}{2}$. C. $I = 2$. D. $I = \frac{5}{2}$.

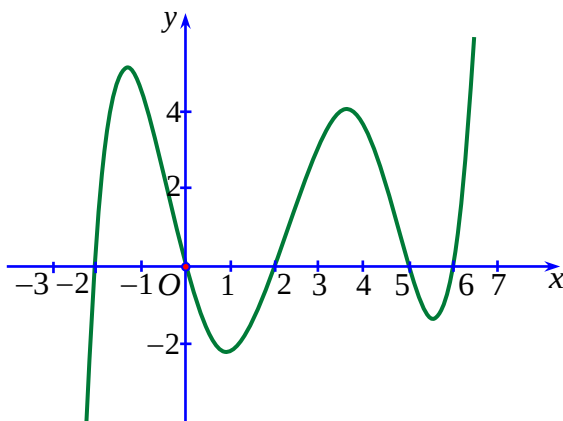
Câu 37: [1D3-3] Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t$ (m/s). Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12$ (m/s²). Tính quãng đường s (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn?

- A. $s = 168$ (m). B. $s = 166$ (m). C. $s = 144$ (m). D. $s = 152$ (m).

Câu 38: [2D2-3] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 10]$ để tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 7} < m(\log_4 x^2 - 7)$ chứa khoảng $(256; +\infty)$.

- A. 7. B. 10. C. 8. D. 9.

Câu 39: [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $M = \max_{[-2; 6]} f(x)$, $m = \min_{[-2; 6]} f(x)$, $T = M + m$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

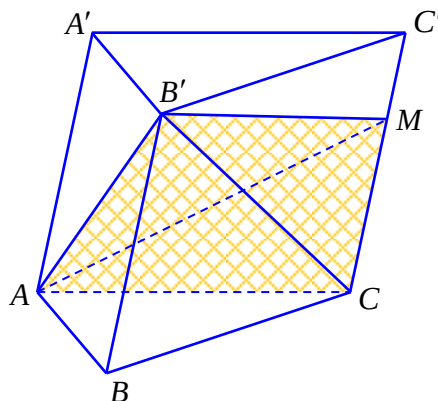


- A. $T = f(0) + f(-2)$. B. $T = f(5) + f(-2)$.

C. $T = f(5) + f(6)$.

D. $T = f(0) + f(2)$.

Câu 40: [2H1-2] Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $9a^3$ và M là điểm nằm trên cạnh CC' sao cho $MC = 2MC'$. Tính thể tích khối tứ diện $AB'CM$ theo a .



A. $2a^3$.

B. $4a^3$.

C. $3a^3$.

D. a^3 .

Câu 41: [2D3-2] Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phân biệt của phương trình $z^4 + z^2 + 1 = 0$ trên tập số phức. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$.

A. 2.

B. 8.

C. 6.

D. 4.

Câu 42: [2D1-3] Cho đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 . Tính giá trị biểu thức $P = \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \frac{1}{f'(x_3)}$.

A. $P = \frac{1}{2b} + \frac{1}{c}$.

B. $P = 0$.

C. $P = b + c + d$.

D. $P = 3 + 2b + c$.

Câu 43: [1D5-4] Cho hàm số $f(x) = (3x^2 - 2x - 1)^9$. Tính đạo hàm cấp 6 của hàm số tại điểm $x = 0$.

A. $f^{(6)}(0) = -60480$.

B. $f^{(6)}(0) = -34560$.

C. $f^{(6)}(0) = 60480$.

D. $f^{(6)}(0) = 34560$.

Câu 44: [2D3-3] Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \ln(\tan x + 1) dx = a\pi + b \ln 2 + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính

$T = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - c$.

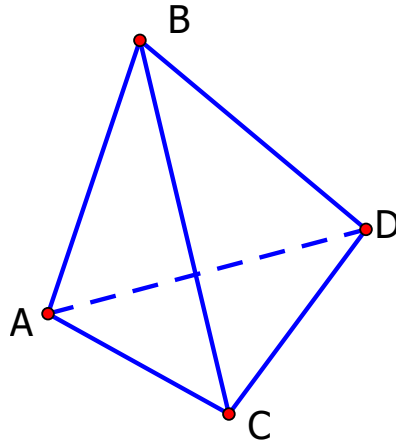
A. $T = 2$.

B. $T = 4$.

C. $T = 6$.

D. $T = -4$.

Câu 45: [1H3-3] Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$, $(ACD) \perp (BCD)$. Tìm giá trị của x để $(ABC) \perp (ABD)$?



A. $x = a$.

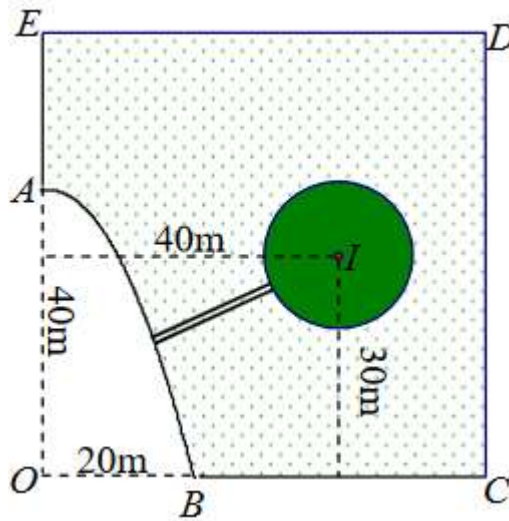
B. $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $x = a\sqrt{2}$.

D. $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 46: [2D1-4] Một cái ao hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn có bán kính 10m. Người ta muốn bắc một cây cầu từ bờ AB của ao đến vườn. Tính gần đúng độ dài tối thiểu l của cây cầu biết :

- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O ;
- Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;
- Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40 m và 20 m;
- Tâm I của mảnh vườn lần lượt cách đường thẳng AE và BC lần lượt 40 m và 30 m.



A. $l \approx 17,7$ m.

B. $l \approx 25,7$ m.

C. $l \approx 27,7$ m.

D. $l \approx 15,7$ m.

Câu 47: [2D4-3] Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 5 - 3i| = 5$, đồng thời $|z_1 - z_2| = 8$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = z_1 + z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình nào dưới đây?

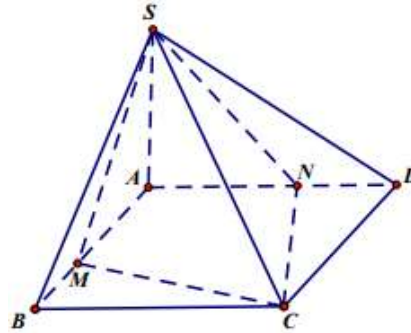
A. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

B. $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 36$.

C. $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 16$.

D. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9$.

Câu 48: [2H1-4] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA=2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$). Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC). Tính tổng $T = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2}$ khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất.



- A. $T = 2$. B. $T = \frac{5}{4}$. C. $T = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$. D. $T = \frac{13}{9}$.

Câu 49: [2H3-4] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(7;2;3)$, $B(1;4;3)$, $C(1;2;6)$, $D(1;2;3)$ và điểm M tùy ý. Tính độ dài đoạn OM khi biểu thức $P = MA + MB + MC + \sqrt{3}MD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $OM = \frac{3\sqrt{21}}{4}$. B. $OM = \sqrt{26}$. C. $OM = \sqrt{14}$. D. $OM = \frac{5\sqrt{17}}{4}$.

Câu 50: [1H3-4] Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=3a$, $AC=a\sqrt{15}$, $BD=a\sqrt{10}$, $CD=4a$. Biết rằng góc giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (BCD) bằng 45° , khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC bằng $\frac{5a}{4}$ và hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) nằm trong tam giác BCD . Tính độ dài đoạn thẳng AD .

- A. $\frac{5a\sqrt{2}}{4}$. B. $2\sqrt{2}a$. C. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. D. $2a$.

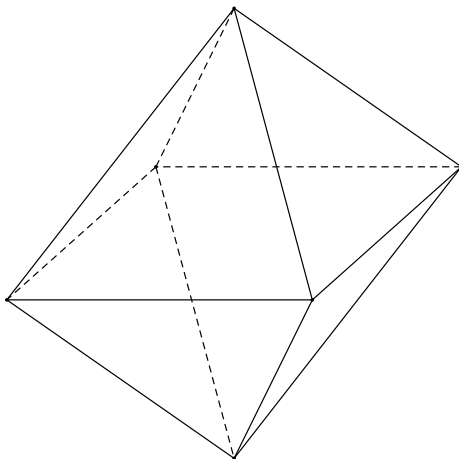
-----HẾT-----

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	C	C	A	B	B	C	C	B	C	C	B	D	B	A	B	A	A	A	B	B	C	C	C	D
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	39	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	A	D	C	D	A	D	D	D	D	D	A	C	B	A	D	B	A	B	D	A	B	B	C	D

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: **[2H1-1]** Hình bát diện đều (tham khảo hình vẽ) có bao nhiêu mặt?



- A. 8.** **B. 9.** **C. 6.** **D. 4.**

Lời giải

Chọn A.

Tính theo định nghĩa.

Câu 2: [2H3-1] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vec tơ $\vec{a}(1; -2; 0)$ và $\vec{b}(-2; 3; 1)$.
Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8$. **B.** $2\vec{a} = (2; -4; 0)$. **C.** $\vec{a} + \vec{b} = (-1; 1; -1)$. **D.** $|\vec{b}| = 14$.

Lời giải

Chọn C.

$$\vec{a} + \vec{b} = (-1; 1; 1).$$

Câu 3: **[2D2-1]** Cho các hàm số $y = \log_{2018} x$, $y = \left(\frac{\pi}{e}\right)^x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x$. Trong các hàm số trên có bao nhiêu hàm số nghịch biến trên tập xác định của hàm số đó.

- A.** 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ có hệ số $a = \frac{1}{2} < 1$, hàm số $y = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x$ có hệ số $a = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$ nên nghịch biến trên tập xác định của các hàm số đó.

Câu 4: [2D1-2] Hàm số $y = -\frac{x^4}{2} + 1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A.** $(-\infty; 0)$. **B.** $(-3; 4)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y' = -4x^3$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	
			1		
					$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Câu 5: [2D2-1] Cho các số thực $a < b < 0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|$.

B. $\ln(\sqrt{ab}) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.

C. $\ln\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \ln(a^2) - \ln(b^2)$.

D. $\ln(ab)^2 = \ln(a^2) + \ln(b^2)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $a < b < 0$ nên hai giá trị $\ln a$, $\ln b$ không xác định.

Câu 6: [2D1-2] Số đường tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^2}$ là bao nhiêu?

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$ nên đồ thị nhận đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Câu 7: [1D4-1] Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 2018}{2n + 1}$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. 4.

C. 2.

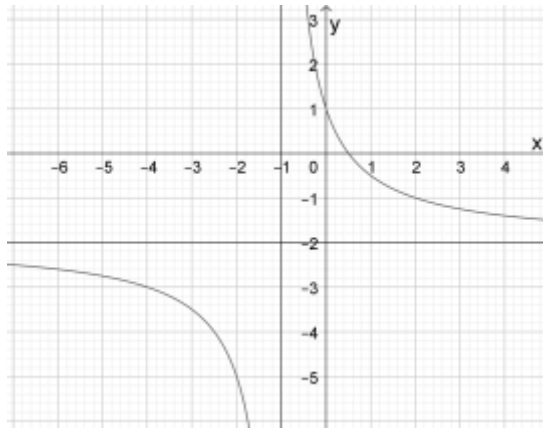
D. 2018.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 2018}{2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{2018}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = 2.$$

Câu 8: [2D1-2] Đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{1-2x}{x-1}$.

B. $y = \frac{1-2x}{1-x}$.

C. $y = \frac{1-2x}{x+1}$.

D. $y = \frac{3-2x}{x+1}$.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào đồ thị ta thấy, đồ thị nhận hai đường thẳng $x = -1$ và $y = -2$ là tiệm cận.

Đồ thị là đường đi xuống nên hàm số là hàm nghịch biến và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 nên hàm số cần tìm là $y = \frac{1-2x}{x+1}$.

Câu 9: [1D2-1] Cho A và B là hai biến cố xung khắc. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P(A) + P(B) = 1$.

B. Hai biến cố A và B không đồng thời xảy ra.

C. Hai biến cố A và B đồng thời xảy ra.

D. $P(A) + P(B) < 1$.

Lời giải

Chọn B.

Vì A và B là hai biến cố xung khắc nên hai biến cố này không đồng thời xảy ra.

Câu 10: [2D3-1] Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(u)du = F(u) + C$.

B. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ (k là hằng số và $k \neq 0$).

C. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) = G(x)$.

D. $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

Lời giải

Chọn C.

Mệnh đề C sai, ví dụ $f(x) = 1$ thì $F(x) = x$ và $G(x) = x + 1$ cũng đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ mà $F(x) \neq G(x)$.

Câu 11: [2H3-1] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): z - 2x + 3 = 0$. Một vector pháp tuyến của (P) là:

A. $\vec{u} = (0; 1; -2)$.

B. $\vec{v} = (1; -2; 3)$.

C. $\vec{n} = (2; 0; -1)$.

D. $\vec{w} = (1; -2; 0)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $z - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x - z - 3 = 0$. Do đó mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 0; -1)$.

Câu 12: [2D4-1] Tính môđun của số phức $z = 3 + 4i$.

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. $\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn B.

Môđun của số phức $z = 3 + 4i$ là: $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Câu 13: [2D3-1] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$) được xác định bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \int_b^a |f(x)| dx$.

B. $S = \left| \int_b^a f(x) dx \right|$.

C. $S = \int_b^a f(x) dx$.

D. $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

Lời giải

Chọn D.

Diện tích hình phẳng S là: $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

Câu 14: [2H2-1] Mặt phẳng chứa trục của một hình nón cắt hình nón theo thiết diện là:

A. một hình chữ nhật.

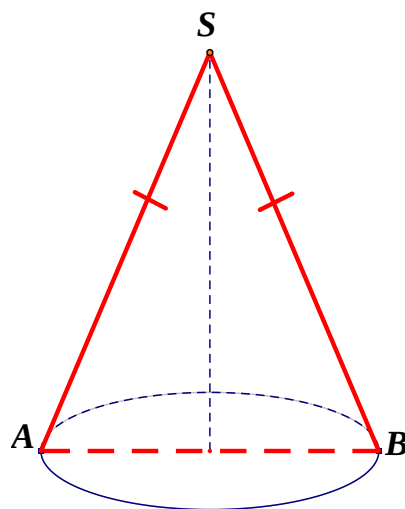
B. một tam giác cân.

C. một đường elip.

D. một đường tròn.

Lời giải

Chọn B.



Mặt phẳng chứa trục của một hình nón cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác cân.

Câu 15: [2D1-3] Ta xác định được các số a , b , c để đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $(1; 0)$ và có điểm cực trị $(-2; 0)$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.

A. 25.

B. -1.

C. 7.

D. 14.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y' = 3x^2 + 2ax + b$.

Đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $(1; 0)$ nên ta có: $a + b + c = -1$.

Đồ thị hàm số có điểm cực trị $(-2; 0)$ nên $\begin{cases} 4a - 2b + c = 8 \\ y'(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b + c = 8 \\ -4a + b = -12 \end{cases}$.

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a - 2b + c = 8 \\ -4a + b = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases}.$$

Vậy $T = a^2 + b^2 + c^2 = 25$.

Câu 16: [2D3-1] Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x - \sin 2x$ là

A. $\frac{x^2}{2} + \cos 2x + C$. B. $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + C$. C. $x^2 + \frac{1}{2} \cos 2x + C$. D. $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x + C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int f(x) dx = \int (x - \sin 2x) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + C$.

Câu 17: [1D1-1] Cho các mệnh đề sau

- (I) Hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$ là hàm số chẵn.
 (II) Hàm số $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$ có giá trị lớn nhất là 5.
 (III) Hàm số $f(x) = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
 (IV) Hàm số $f(x) = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn A.

* Xét hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$\forall x \in D$, ta có: $-x \in D$ và $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-\sin x}{x^2 + 1} = -f(x)$.

Vậy hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$ là hàm số lẻ.

Do đó (I) sai.

* Xét hàm số $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $f(x) = 3\sin x + 4\cos x = 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right)$

Đặt $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Ta có $f(x) = 5\sin(x + \alpha) \leq |5|$

$\Rightarrow \max f(x) = 5$ khi $\sin(x + \alpha) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Vậy hàm số $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$ có giá trị lớn nhất là 5.

Do đó (II) đúng.

* Xét hàm số $f(x) = \tan x$. Ta có hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Do đó (III) sai.

* Xét hàm số $f(x) = \cos x$. Ta có $f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Do đó (IV) sai.

Vậy trong bốn mệnh đề đã cho có một mệnh đề đúng.

Câu 18: [2D1-3] Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx+16}{x+m}$ đồng biến trên $(0; 10)$.

A. $m \in (-\infty; -10] \cup (4; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; -10] \cup [4; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có: $y' = \frac{m^2 - 16}{(x+m)^2}$.

$$\text{Hàm số đồng biến trên } (0; 10) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16 > 0 \\ -m \leq 0 \\ m^2 - 16 > 0 \\ -m \geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m \leq -10 \end{cases}.$$

Vậy $m \in (-\infty; -10] \cup (4; +\infty)$.

Câu 19: [2H3-2] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; 0; -2)$ và mặt phẳng (P) có phương trình: $x + 2y - 2z + 4 = 0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

A. $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$.

B. $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 3$.

C. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 3$.

D. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$.

Lời giải

Chọn A.

Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên bán kính mặt cầu là

$$R = d(I, (P)) = \frac{|1 + 0 - 2(-2) + 4|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 3.$$

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$.

Câu 20: [2D1-2] Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

A. $m = 1, m = 3$.

B. $m = 1$.

C. $m = 3$.

D. Không tồn tại m .

Lời giải

Chọn B.

Xét $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + 1$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 4mx + m^2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ nên $y'(1) = 0$.

$$\text{Ta có } 3 - 4m + m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}.$$

Thử lại:

* Với $m = 1$, ta có:

$$y = x^3 - 2x^2 + x + 1.$$

$$y' = 3x^2 - 4x + 1.$$

$$y'' = 6x - 4.$$

$y'(1) = 0$ và $y''(1) = 2 > 0$. Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

* Với $m = 3$, ta có:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$$

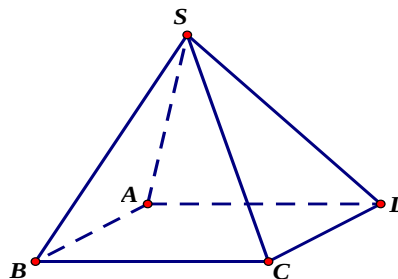
$$y' = 3x^2 - 12x + 9.$$

$$y'' = 6x - 12.$$

$y'(1) = 0$ và $y''(1) = -6 < 0$. Do đó hàm số không đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Vậy với $m = 1$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 21: [1H1-1] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .



A. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và tâm O đáy.

B. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BC .

C. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng AB .

D. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BD .

Lời giải

Chọn B.

Xét hai mặt phẳng (SAD) và (SBC)

Có: S chung và $AD \parallel BC$

Gọi (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC)

$\Rightarrow (d)$ đi qua S và song song với AD và BC .

Câu 22: [2D1-1] Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1-2x}{x} > 0$ là.

A. $S = \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

B. $S = \left(0; \frac{1}{3}\right)$.

C. $S = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

D. $S = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C.

Xét bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1-2x}{x} > 0$ điều kiện $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

Ta có : $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1-2x}{x} > 0 = \log_{\frac{1}{3}} 1 \Rightarrow \frac{1-2x}{x} < 1$ (vì $0 < \frac{1}{3} < 1$)

$$\Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{x} < 0$$

$$\text{Mặt khác } x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} > x > \frac{1}{3}.$$

Câu 23: [2D2-2] Gọi T là tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 6 = 0$. Tính T .

A. $T = 5$.

B. $T = -3$.

C. $T = 36$.

D. $T = \frac{1}{243}$.

Lời giải

Chọn C.

Xét phương trình : $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 6 = 0$ (điều kiện $x > 0$)

$$\Leftrightarrow (-\log_3 x)^2 - 5\log_3 x + 6 = 0 \Leftrightarrow (\log_3 x)^2 - 5\log_3 x + 6 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \log_3 x \Rightarrow (1) \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2 \Rightarrow \log_3 x = 2 \Rightarrow x = 9$$

$$\text{Với } t = 3 \Rightarrow \log_3 x = 3 \Rightarrow x = 27.$$

$$\text{Vậy } T = 36.$$

Câu 24: [1H3-2] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a\sqrt{2}$ tính khoảng cách của hai đường thẳng CC' và BD .

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

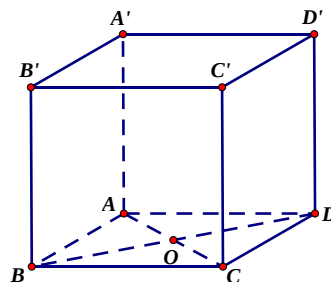
B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

C. a .

D. $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C.



$$\text{Ta có vì } ABCD.A'B'C'D' \Rightarrow \begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp CC' \end{cases}$$

$\Rightarrow OC$ là khoảng cách của hai đường thẳng CC' và BD

Mà $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng $a\sqrt{2} \Rightarrow AC = 2a \Rightarrow OC = a$.

Câu 25: [2H3-1] Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm là $A(1;3;-1)$, $B(3;-1;5)$. Tìm tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$.

- A. $M\left(\frac{5}{3}; \frac{13}{3}; 1\right)$. B. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. C. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. D. $M(4; -3; 8)$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A - 3x_B}{1-3} = 4 \\ y_M = \frac{y_A - 3y_B}{1-3} = -3 \\ z_M = \frac{z_A - 3z_B}{1-3} = 8 \end{cases} \Rightarrow M(4; -3; 8).$$

Câu 26: [1D2-2] Giải bóng đá V-LEAGUE 2018 có tất cả 14 đội bóng tham gia, các đội bóng thi đấu vòng tròn 2 lượt (tức là hai đội A và B bất kỳ thi đấu với nhau hai trận, một trận trên sân của đội A, trận còn lại trên sân của đội B). Hỏi giải đấu có tất cả bao nhiêu trận đấu?

- A. 182. B. 91. C. 196. D. 140.

Lời giải

Chọn A.

Số trận đấu là $A_{14}^2 = 182$.

Câu 27: [1D2-2] Số đường chéo của đa giác đều có 20 cạnh là bao nhiêu?

- A. 170. B. 190. C. 360. D. 380.

Lời giải

Chọn A.

Số đường chéo của đa giác đều n cạnh là $C_n^2 - n$.

Với $n = 20$ thì $C_{20}^2 - 20 = 170$.

Câu 28: [2D4-2] Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 2$, $z_2 = 4i$, $z_3 = 2 + 4i$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Tính diện tích tam giác ABC .

- A. 8. B. 2. C. 6. D. 4.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $A(2;0)$, $B(0;4)$, $C(2;4)$ suy ra $\overrightarrow{AC} = (0;4)$; $\overrightarrow{BC} = (2;0) \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Do đó tam giác ABC là tam giác vuông tại C . Suy ra $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$.

Câu 29: [2D1-3] Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m$ (với m là tham số thực). Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = -3$ tại bốn điểm phân biệt, trong đó có một điểm có hoành độ lớn hơn 2 còn ba điểm kia có hoành độ nhỏ hơn 1, là khoảng $(a;b)$ (với $a, b \in \mathbb{Q}$, a, b là phân số tối giản). Khi đó, $15ab$ nhận giá trị nào sau đây?

- A. -63. B. 63. C. 95. D. -95.

Lời giải

Chọn C.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^4 + 2mx^2 + m = -3$. Đặt $x^2 = t, t \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành $t^2 + 2mt + m + 3 = 0$ (1) và đặt $f(t) = t^2 + 2mt + m + 3$.

Để đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -3$ tại 4 điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn $0 < t_1 < t_2$ và khi đó hoành độ bốn giao điểm là $-\sqrt{t_2} < -\sqrt{t_1} < \sqrt{t_1} < \sqrt{t_2}$.

Do đó, từ điều kiện của bài toán suy ra $\begin{cases} \sqrt{t_2} > 2 \\ \sqrt{t_1} < 1 \end{cases}$ hay $0 < t_1 < 1 < 4 < t_2$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) < 0 \\ f(4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 > 0 \\ 3m+4 < 0 \\ 9m+19 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < -\frac{19}{9}$.

Vậy $a = -3, b = -\frac{19}{9}$ nên $15ab = 95$.

Câu 30: [2D2-3] Sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn theo công thức hàm số mũ $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$, $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t , T là chu kỳ bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Khi phân tích một mẫu gỗ từ công trình kiến trúc cổ, các nhà khoa học thấy rằng khối lượng cacbon phóng xạ $^{14}_6\text{C}$ trong mẫu gỗ đó đã mất 45% so với lượng $^{14}_6\text{C}$ ban đầu của nó. Hỏi công trình kiến trúc đó có niên đại khoảng bao nhiêu năm? Cho biết chu kỳ bán rã của $^{14}_6\text{C}$ là khoảng 5730 năm.

A. 5157 (năm). B. 3561 (năm). C. 6601 (năm). D. 4942 (năm).

Lời giải

Chọn D.

Từ công thức $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$, $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ và $m(t) = 0,55m_0$

ta suy ra $0,55 = e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} \Leftrightarrow 0,55 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Rightarrow t = 5730 \cdot \log_{\frac{1}{2}} 0,55 \approx 4942$ (năm).

Câu 31: [2H3-3] Một tấm đề can hình chữ nhật được cuộn tròn lại theo chiều dài tạo thành một khối trụ có đường kính 50 (cm). Người ta trải ra 250 vòng để cắt chữ và in tranh cổ động, phần còn lại là một khối trụ có đường kính 45 (cm). Hỏi phần đã trải ra dài bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng đơn vị)?

A. 373 (m). B. 187 (m). C. 384 (m). D. 192 (m).

Lời giải

Chọn A.

Cách 1: Bề dày của tấm đề can là: $a = \frac{50-45}{2 \times 250} = 0,01$ (cm).

Gọi d là chiều dài đã trải ra và h là chiều rộng của tấm đề can. Khi đó ta có:

$$dha = \pi \left(\frac{50}{2}\right)^2 h - \pi \left(\frac{45}{2}\right)^2 h \Rightarrow d = \frac{\pi(50^2 - 45^2)}{4a} \approx 37306 \text{ (cm)} \approx 373 \text{ (m)}.$$

Cách 2: Chiều dài của phần trải ra là tổng chu vi của 250 đường tròn có bán kính là một cấp số cộng có số hạng đầu bằng 25, công sai là $-a = -0,01$.

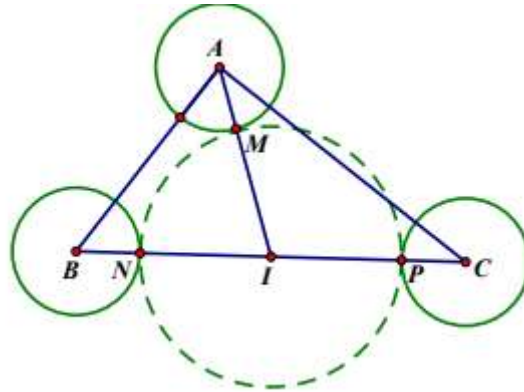
Do đó chiều dài là $l = 2\pi(2.25 - 249.0,01)\frac{250}{2} \approx 37314 \text{ (cm)} \approx 373 \text{ (m)}$.

Câu 32: [2H3-3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) có bán kính $r = 1$ và lần lượt có tâm là các điểm $A(0;3;-1)$, $B(-2;1;-1)$, $C(4;-1;-1)$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với cả ba mặt cầu trên. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất là

- A. $R = 2\sqrt{2} - 1$. B. $R = \sqrt{10}$. C. $R = 2\sqrt{2}$. D. $R = \sqrt{10} - 1$.

Lời giải

Chọn D.



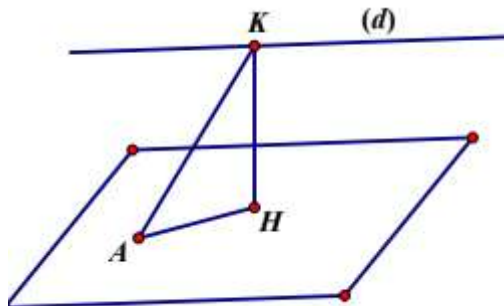
Ta có $AB = \sqrt{8}$, $AC = \sqrt{32}$, $BC = \sqrt{40}$ nên tam giác ABC vuông tại A . Gọi I là trung điểm của BC , khi đó $IM = IN = IP = \sqrt{10} - 1$. Do đó mặt cầu (S) thỏa mãn đề bài là mặt cầu có bán kính $R = \sqrt{10} - 1$.

Câu 33: [2H3-3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ đường thẳng d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- A. $x - y - 6 = 0$. B. $x + 3y + 2z + 10 = 0$. C. $x - 2y - 3z - 1 = 0$. D. $3x + z + 2 = 0$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi $K(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của A lên d . Tọa độ của K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} -x+1=y-1 \\ y-1=-z+1 \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow K(1;1;1).$$

Ta có $d((d), (P)) = d(K, (P)) = KH \leq KA = \sqrt{14}$. Nên khoảng cách từ d đến (P) đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{14}$ khi mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với $\overrightarrow{KA}$. Khi đó có thể chọn VTPT của (P) là $\overrightarrow{KA}$. Vậy (P) vuông góc với mặt phẳng $3x + z + 2 = 0$.

Câu 34: [1D2-3] Xếp ngẫu nhiên 8 chữ cái trong cụm từ ‘THANH HOA’ thành một hàng ngang. Tính xác suất để có ít nhất hai chữ H đứng cạnh nhau.

A. $\frac{5}{14}$.

B. $\frac{79}{84}$.

C. $\frac{5}{84}$.

D. $\frac{9}{14}$.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1.

Xét trường hợp các chữ cái được xếp bất kì, khi đó ta xếp các chữ cái lần lượt như sau

- Có C_8^3 cách chọn vị trí và xếp có 3 chữ cái H.

- Có C_5^2 cách chọn vị trí và xếp có 2 chữ cái A.

- Có $3!$ cách xếp 3 chữ cái T, O, N.

Do đó số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot 3!$.

Gọi A là biến cố “có ít nhất hai chữ H đứng cạnh nhau”

- Nếu có ba chữ H đứng cạnh nhau, có 6 cách xếp 3 chữ H.

- Nếu đúng hai chữ H đứng cạnh nhau thì

☐ Khi hai chữ H ở hai vị trí đầu hoặc cuối có 5 cách xếp chữ cái H còn lại

☐ Khi hai chữ H đứng ở vị trí giữa thì có 4 cách xếp chữ cái H còn lại.

Do đó có $2 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 30$ cách xếp 3 chữ H sao cho có đúng hai chữ H đứng cạnh nhau.

Như vậy có $30 + 6 = 36$ cách xếp 3 chữ H, ứng với cách xếp trên ta có C_5^2 cách chọn vị trí và xếp 2 chữ cái A và $3!$ cách xếp T, O, N

Suy ra $n(A) = 36 \cdot C_5^2 \cdot 3!$

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{9}{14}$.

Cách 2. Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \frac{8!}{2!3!} = 3360$

Gọi A là biến cố “có ít nhất hai chữ H đứng cạnh nhau”

Đầu tiên ta xếp 2 chữ A và ba chữ T, O, N có $\frac{5!}{2!}$ cách.

Tiếp theo ta có 6 vị trí (xen giữa và ở hai đầu) để xếp 3 chữ H và không có chữ H nào đứng liền nhau, có C_3^6 cách.

Do đó $n(\bar{A}) = \frac{5!}{2!} C_3^6 \Rightarrow n(A) = n(\Omega) - n(\bar{A}) = 2160$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{9}{14}$.

Câu 35: [1D1-2] Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos^3 2x - \cos^2 2x = m \sin^2 x$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$?

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D.

Ta có:

$$\cos^3 2x - \cos^2 2x = m \sin^2 x \Leftrightarrow \cos^2 2x (\cos 2x - 1) = m \sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x (2 \cos^2 2x + m) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 2x + m = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = -m - 1.$$

$$\text{Có } x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 4x \in \left(0; \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow -\frac{1}{2} < \cos 4x < 1$$

$$\text{Để phương trình có nghiệm } x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \text{ thì } -\frac{1}{2} < -m - 1 < 1 \Leftrightarrow -2 < m < -\frac{1}{2}.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = -1$.

Câu 36: [2D3-3] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1$.

Tính tích phân $\int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx$.

A. $I = 3$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = 2$.

D. $I = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Đặt $I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = 1$, $I_2 = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1$.

□ Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cdot \cos x dx = 2 \sin^2 x \cdot \cot x dx = 2t \cdot \cot x dx$.

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{1}{2}$	1

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) \cdot \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{4x} d(4x) = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x} dx.$$

Suy ra $\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x} dx = 2I_1 = 2$

□ Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow 2t dt = dx$.

x	1	16
t	1	4

$$I_2 = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = \int_1^4 \frac{f(t)}{t^2} 2t dt = 2 \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 2 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{16}} \frac{f(4x)}{4x} d(4x) = 2 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{16}} \frac{f(4x)}{x} dx.$$

Suy ra $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{16}} \frac{f(4x)}{x} dx = \frac{1}{2} I_2 = \frac{1}{2}$

Khi đó, ta có:

$$\int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x} dx + \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Câu 37: **[1D3-3]** Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t$ (m/s). Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12$ (m/s²). Tính quãng đường s (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn?

- A.** $s = 168$ (m). **B.** $s = 166$ (m). **C.** $s = 144$ (m). **D.** $s = 152$ (m).

Lời giải

Chọn A.

□ Giai đoạn 1: Xe bắt đầu chuyển động đến khi gặp chướng ngại vật.

Quãng đường xe đi được là:

$$S_1 = \int_0^{12} v_1(t) dt = \int_0^{12} 2t dt = t^2 \Big|_0^{12} = 144 \text{ (m)}.$$

□ Giai đoạn 2: Xe gặp chướng ngại vật đến khi dừng hẳn.

Ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v_2(t) = \int a dt = -12t + c$.

Vận tốc của xe khi gặp chướng ngại vật là: $v_2(0) = v_1(12) = 2 \cdot 12 = 24$ (m/s).

$$\Rightarrow -12 \cdot 0 + c = 24 \Rightarrow c = 24 \Rightarrow v_2(t) = -12t + 24.$$

Thời gian khi xe gặp chướng ngại vật đến khi xe dừng hẳn là nghiệm phương trình:

$$-12t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Khi đó, quãng đường xe đi được là:

$$S_2 = \int_0^2 v_2(t) dt = \int_0^2 (-12t + 24) dt = (-6t^2 + 24t) \Big|_0^2 = 24 \text{ (m)}.$$

Vậy tổng quãng đường xe đi được là: $S = S_1 + S_2 = 168$ (m).

Câu 38: **[2D2-3]** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 10]$ để tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 7} < m(\log_4 x^2 - 7)$ chứa khoảng $(256; +\infty)$.

- A.** 7. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x + 3 \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x - 6 \log_2 x - 7 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x < -1 \\ \log_2 x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 128 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 128 \end{cases}$$

Với điều kiện trên bất phương trình trở thành $\sqrt{\log_2^2 x - 6 \log_2 x - 7} < m(\log_2 x - 7)$ (*)

Đặt $t = \log_2 x$ thì $t > 8$ vì $x \in (256; +\infty)$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(t+1)(t-7)} < m(t-7) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{t+1}{t-7}} < m, \forall t > 8. \text{ Đặt } f(t) = \sqrt{\frac{t+1}{t-7}}.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq \max_{(8; +\infty)} f(t)$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{\frac{t+1}{t-7}}$ trên khoảng $(8; +\infty)$

Ta có $f'(t) = \frac{-4}{(t-7)^2} \cdot \sqrt{\frac{t-7}{t+1}} < 0, \forall t > 8 \Rightarrow f(t)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(8; +\infty)$

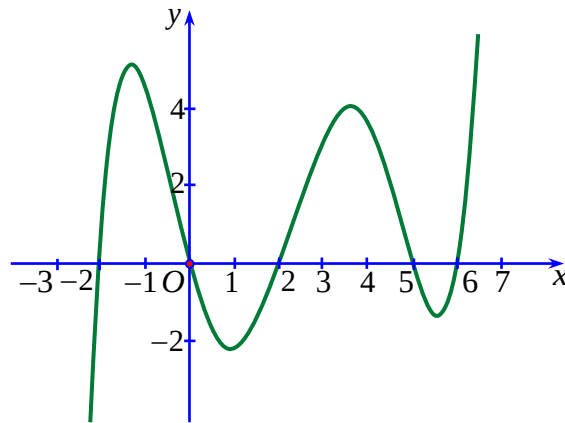
Do đó $\max_{(8; +\infty)} f(t) = f(8) = 3 \Rightarrow m \geq 3.$

Mà $m \in [0; 10]$ nên $m \in \{3; 4; \dots; 10\}.$

Vậy có 8 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 39: [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt

$M = \max_{[-2; 6]} f(x), m = \min_{[-2; 6]} f(x), T = M + m.$ Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $T = f(0) + f(-2).$

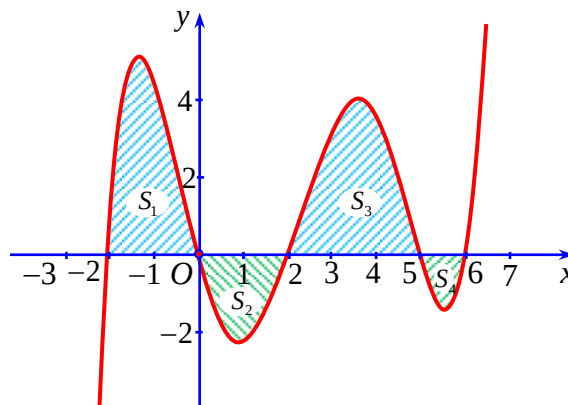
B. $T = f(5) + f(-2).$

C. $T = f(5) + f(6).$

D. $T = f(0) + f(2).$

Lời giải

Chọn B.



Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với trục hoành.

Quan sát hình vẽ, ta có

$$\diamond \int_{-2}^0 f'(x) dx > \int_0^2 -f'(x) dx \Leftrightarrow f(x)|_{-2}^0 > f(x)|_2^0$$

$$\Leftrightarrow f(0) - f(-2) > f(0) - f(2) \Leftrightarrow f(-2) < f(2)$$

$$\diamond \int_0^2 -f'(x) dx < \int_2^5 f'(x) dx \Leftrightarrow f(x)|_2^0 < f(x)|_2^5$$

$$\Leftrightarrow f(0) - f(2) < f(5) - f(2) \Leftrightarrow f(0) < f(5)$$

$$\diamond \int_2^5 f'(x) dx > \int_5^6 -f'(x) dx \Leftrightarrow f(x)|_2^5 > f(x)|_6^5$$

$$\Leftrightarrow f(5) - f(2) > f(5) - f(6) \Leftrightarrow f(2) < f(6)$$

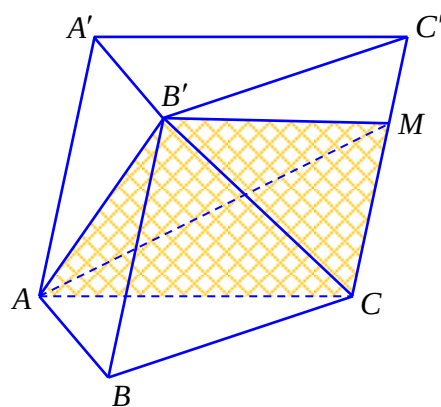
Ta có bảng biến thiên

x	-2		0		2		5		6
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	0	-	0
$f(x)$	$f(-2)$		$f(0)$		$f(2)$		$f(5)$		$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $M = \max_{[-2;6]} f(x) = f(5)$ và $m = \min_{[-2;6]} f(x) = f(-2)$

Khi đó $T = f(5) + f(-2)$.

Câu 40: [2H1-2] Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $9a^3$ và M là điểm nằm trên cạnh CC' sao cho $MC = 2MC'$. Tính thể tích khối tứ diện $AB'CM$ theo a .



A. $2a^3$.

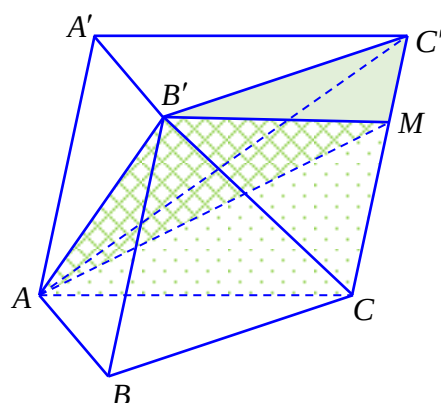
B. $4a^3$.

C. $3a^3$.

D. a^3 .

Lời giải

Chọn A.



Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được chia thành 3 khối tứ diện $B'.ABC$; $AA'B'C'$ và $AB'C'C$.

Trong đó $V_{B'.ABC} = V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = 3a^3$ (vì chúng có cùng chiều cao và diện tích đáy với khối lăng trụ) $\Rightarrow V_{A.B'C'C} = V_{ABC.A'B'C'} - 2V_{B'.ABC} = 3a^3$.

Ta lại có $V_{A.B'C'C} = V_{A.B'CM} + V_{A.B'CM}$ và $V_{A.B'CM} = \frac{1}{2}V_{A.B'CM}$ (vì $MC = 2MC'$ nên $S_{B'CM} = \frac{1}{2}S_{B'CM}$)

Do đó $V_{A.B'C'C} = \frac{3}{2}V_{A.B'CM} \Rightarrow V_{A.B'CM} = \frac{2}{3}V_{A.B'C'C} = 2a^2$.

Câu 41: [2D3-2] Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phân biệt của phương trình $z^4 + z^2 + 1 = 0$ trên tập số phức. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$.

A. 2.

B. 8.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $z^4 + z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 1)^2 - z^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2 + z + 1)(z^2 - z + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + z + 1 = 0 \\ z^2 - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}i^2 \\ \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}i^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_{1,2} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \\ z_{3,4} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \end{cases} \Rightarrow |z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1.$$

Vậy $P = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 = 4$.

Câu 42: [2D1-3] Cho đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 . Tính giá trị biểu thức $P = \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \frac{1}{f'(x_3)}$.

A. $P = \frac{1}{2b} + \frac{1}{c}$.

B. $P = 0$.

C. $P = b + c + d$.

D. $P = 3 + 2b + c$.

Lời giải

Chọn B.

Do đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 nên $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

$\Rightarrow f'(x) = (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_2)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \frac{1}{f'(x_3)} = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \\ &= \frac{(x_2 - x_3) - (x_3 - x_1) + (x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} = 0. \text{ Vậy } P = 0. \end{aligned}$$

Câu 43: [1D5-4] Cho hàm số $f(x) = (3x^2 - 2x - 1)^9$. Tính đạo hàm cấp 6 của hàm số tại điểm $x = 0$.

A. $f^{(6)}(0) = -60480$.

B. $f^{(6)}(0) = -34560$.

C. $f^{(6)}(0) = 60480$.

D. $f^{(6)}(0) = 34560$.

Lời giải

Chọn .

Giả sử $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{18}x^{18}$.

Khi đó $f^{(6)}(x) = 6!a_6 + b_7x + b_8x^2 + \dots + b_{18}x^{12} \Rightarrow f^{(6)}(0) = 720a_6$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (3x^2 - 2x - 1)^9 &= -(1 + 2x - 3x^2)^9 = -\sum_{k=0}^9 C_9^k (2x - 3x^2)^k \\ &= -\sum_{k=0}^9 C_9^k \sum_{i=0}^k C_k^i (2x)^{k-i} (-3x^2)^i = -\sum_{k=0}^9 \sum_{i=0}^k C_9^k C_k^i 2^{k-i} (-3)^i x^{k+i}. \end{aligned}$$

Số hạng chứa x^6 ứng với k, i thỏa mãn $\begin{cases} 0 \leq i \leq k \leq 9 \\ k+i=6 \end{cases}$

$$\Rightarrow (k; i) \in \{(6; 0), (5; 1), (4; 2), (3; 3)\}$$

$$\Rightarrow a_6 = -\left[C_9^6 C_6^0 2^6 (-3)^0 + C_9^5 C_5^1 2^4 (-3)^1 + C_9^4 C_4^2 2^2 (-3)^2 + C_9^3 C_3^3 2^0 (-3)^3 \right] = -84$$

$$\Rightarrow f^{(6)}(0) = 720 \cdot (-84) = -60480.$$

Câu 44: [2D3-3] Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \ln(\tan x + 1) dx = a\pi + b \ln 2 + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính

$$T = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - c.$$

A. $T = 2$.

B. $T = 4$.

C. $T = 6$.

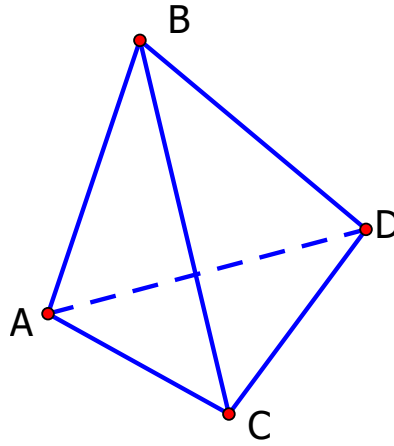
D. $T = -4$.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \ln(\tan x + 1) dx &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\tan x + 1) d(\cos 2x) \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2x \ln(\tan x + 1) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x d[\ln(\tan x + 1)] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \cdot \frac{1}{\tan x + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} d(\cos x) \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8} \pi - \frac{1}{4} \ln 2 \Rightarrow T = 8 - 4 + 0 = 4. \end{aligned}$$

Câu 45: [1H3-3] Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$, $(ACD) \perp (BCD)$. Tìm giá trị của x để $(ABC) \perp (ABD)$?



A. $x = a$.

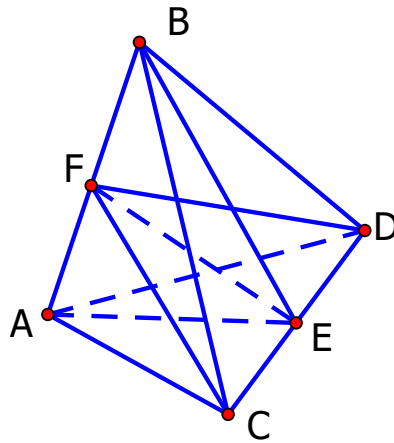
B. $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $x = a\sqrt{2}$.

D. $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải :

Chọn D.



Gọi $E ; F$ lần lượt là trung điểm CD và $AB \Leftrightarrow \begin{cases} AE \perp CD \\ BE \perp CD \end{cases}$ (Tính chất tứ diện đều)

Đồng thời $(BCD) \cap (ACD) = CD \Leftrightarrow ((BCD), (ACD)) = BEA = 90^\circ$

Ta có $\begin{cases} CF \perp AB \\ DF \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CFD) \Leftrightarrow ((ABC), (ABD)) = (CF, FD)$

Vậy để $(ABC) \perp (ABD)$ thì $(CF, FD) = 90^\circ = CFD \Rightarrow$ trung tuyến FE của tam giác CFD

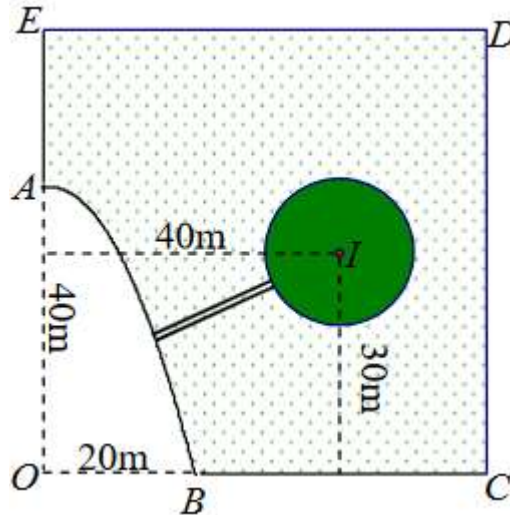
bằng nửa cạnh huyền $\Leftrightarrow FE = \frac{1}{2}CD$

Ta có $\triangle EAB$ vuông cân tại $E \Rightarrow EF = \frac{AE}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{AC^2 - CE^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{2}}$

Vậy $x = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{2}} \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2 - x^2}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{3} \Leftrightarrow x = a \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 46: [2D1-4] Một cái ao hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn có bán kính 10m. Người ta muốn bắc một cầu từ bờ AB của ao đến vườn. Tính gần đúng độ dài tối thiểu l của cây cầu biết :

- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O ;
- Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;
- Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40 m và 20 m;
- Tâm I của mảnh vườn lần lượt cách đường thẳng AE và BC lần lượt 40 m và 30 m.



A. $l \approx 17,7$ m.

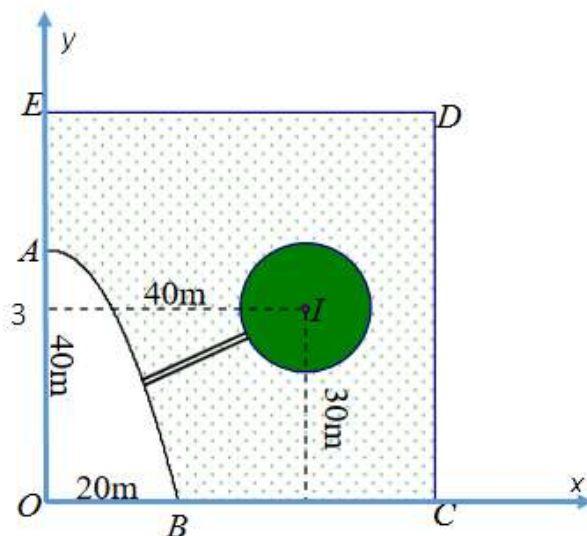
B. $l \approx 25,7$ m.

C. $l \approx 27,7$ m.

D. $l \approx 15,7$ m.

Lời giải :

Chọn A.



Gán trục tọa độ Oxy sao cho $\begin{cases} A \in Oy \\ B \in Ox \end{cases}$ cho đơn vị là 10m.

Khi đó mảnh vườn hình tròn có phương trình $(C): (x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$ có tâm $I(4;3)$

Bờ AB là một phần của Parabol $(P): y = 4 - x^2$ ứng với $x \in [0;2]$

Vậy bài toán trở thành tìm MN nhỏ nhất với $\begin{cases} M \in (P) \\ N \in (C) \end{cases}$.

Đặt trường hợp khi đã xác định được điểm N thì $MN + MI \geq IN$, vậy MN nhỏ nhất khi $MN + MI = IN \Leftrightarrow N; M; I$ thẳng hàng.

Bây giờ, ta sẽ xác định điểm N để IN nhỏ nhất

$$N \in (P) \Leftrightarrow N(x; 4-x^2) \quad IN = \sqrt{(4-x)^2 + (1-x^2)^2} \Leftrightarrow IN^2 = (4-x)^2 + (1-x^2)^2$$

$$\Leftrightarrow IN^2 = x^4 - x^2 - 8x + 17$$

$$\text{Xét } f(x) = x^4 - x^2 - 8x + 17 \text{ trên } [0; 2] \Leftrightarrow f'(x) = 4x^3 - 2x - 8$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 1,3917 \text{ là nghiệm duy nhất và } 1,3917 \in [0; 2]$$

$$\text{Ta có } f(1,3917) = 7,68; f(0) = 17; f(2) = 13.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[0; 2]$ gần bằng 7,68 khi $x \approx 1,3917$

$$\text{Vậy } \min IN \approx \sqrt{7,68} \approx 2,77 \Leftrightarrow IN = 27,7 \text{ m} \Leftrightarrow MN = IN - IM = 27,7 - 10 = 17,7 \text{ m.}$$

Câu 47: [2D4-3] Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 5 - 3i| = 5$, đồng thời $|z_1 - z_2| = 8$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = z_1 + z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình nào dưới đây?

A. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

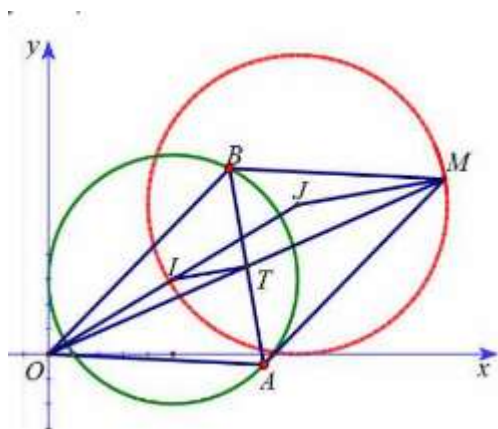
B. $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 36$.

C. $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 16$.

D. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi A, B, M là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, w . Khi đó A, B thuộc đường tròn $(C): (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$ và $AB = |z_1 - z_2| = 8$.

(C) có tâm $I(5; 3)$ và bán kính $R = 5$, gọi T là trung điểm của AB khi đó T là trung điểm của OM và $IT = \sqrt{IA^2 - TA^2} = 3$.

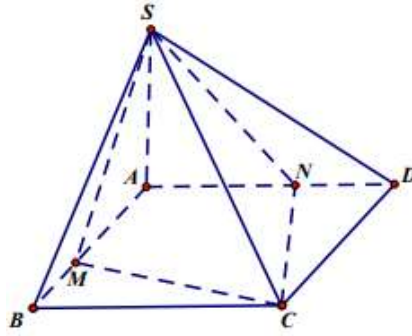
Gọi J là điểm đối xứng của O qua I suy ra $J(10; 6)$ và IT là đường trung bình của tam giác OJM , do đó $JM = 2IT = 6$.

Vậy M thuộc đường tròn tâm J bán kính bằng 6 và có phương trình $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 36$.

Câu 48: [2H1-4] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB ,

AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC) . Tính tổng

$T = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2}$ khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất.



A. $T = 2$.

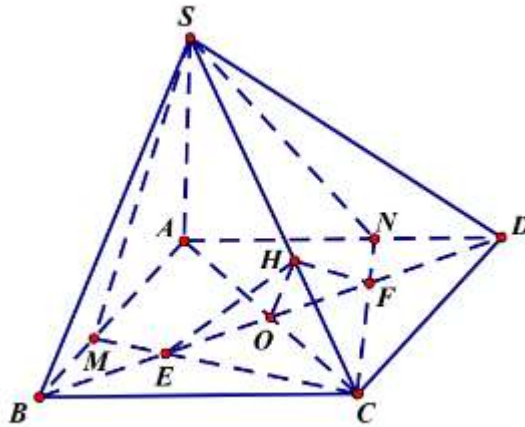
B. $T = \frac{5}{4}$.

C. $T = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

D. $T = \frac{13}{9}$.

Lời giải

Chọn B.



Cách 1: Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D(0;2;0)$, $S(0;0;2)$.

Suy ra $C(2;2;0)$. Đặt $AM = x$, $AN = y$, $x, y \in [0;2]$, suy ra $M(x;0;0)$, $N(0;y;0)$.

$$\overrightarrow{SM} = (x;0;-2), \overrightarrow{SC} = (2;2;-2), \overrightarrow{SN} = (0;y;-2).$$

$$\Rightarrow \vec{n}_1 = [\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC}] = (4;2x-4;2x), \vec{n}_2 = [\overrightarrow{SN}, \overrightarrow{SC}] = (4-2y;-4;-2y).$$

Do $(SMC) \perp (SNC)$ nên $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 4(4-4y) - 4(2x-4) - 4xy = 0 \Leftrightarrow xy + 2(x+y) = 8$.

$$\Leftrightarrow y = \frac{8-2x}{x+2}, \text{ do } y \leq 2 \text{ nên } \frac{8-2x}{x+2} \leq 2 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

$$S_{AMCN} = S_{ABCD} - S_{BMC} - S_{DNC} = 4 - (2-x) - (2-y) = x+y.$$

$$\text{Do đó } V_{S.AMCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x+y) = \frac{2}{3} \left(x + \frac{8-2x}{x+2} \right) = \frac{2}{3} \frac{x^2+8}{x+2}.$$

$$\text{Xét } f(x) = \frac{2}{3} \frac{x^2+8}{x+2} \text{ với } x \in [1;2], f'(x) = \frac{2}{3} \frac{x^2+4x-8}{(x+2)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 + 2\sqrt{3}; x = -2 - 2\sqrt{3} \text{ (loại)}.$$

Lập BBT ta suy ra $\max_{[0;2]} f(x) = f(1) = f(2) = 2$.

$$\text{Vậy } \max V_{S.AMCN} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow T = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}.$$

Cách 2: Đặt $AM = x$, $AN = y$. Gọi $O = AC \cap DB$; $E = BD \cap CM$; $F = BD \cap CN$.

H là hình chiếu vuông góc của O trên SC , khi đó: $HO = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SC \perp OH \\ SC \perp BD \end{cases} \Rightarrow SC \perp (HBD) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp HE \\ SC \perp HF \end{cases}.$$

Do đó góc giữa (SCM) và (SCN) bằng góc giữa HE và HF . Suy ra $HE \perp HF$.

$$\text{Mặt khác } V_{S.AMCN} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x+y).$$

Tính OE , OF :

Ta có: $x > 0$, $y > 0$ và nếu $x \neq 2$, $y \neq 2$ thì gọi K là trung điểm của AM , khi đó:

$$\frac{OE}{EB} = \frac{KM}{MB} = \frac{x}{4-2x} \Rightarrow \frac{OE}{x} = \frac{EB}{4-2x} = \frac{OB}{4-x} \Rightarrow OE = \frac{x\sqrt{2}}{4-x}.$$

$$\text{Tương tự: } OF = \frac{y\sqrt{2}}{4-y}. \text{ Mà } OE \cdot OF = OH^2 \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 12.$$

Nếu $x = 2$ hoặc $y = 2$ thì ta cũng có $OE \cdot OF = OH^2 \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 12$.

Tóm lại: $(x+2)(y+2) = 12$.

$$\text{Suy ra: } V_{S.AMCN} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x+y) = \frac{2}{3}[(x+2) + (y+2) - 4] = \frac{2}{3}\left[(x+2) + \frac{12}{x+2} - 4\right].$$

$$\text{Do đó } \max V_{S.AMCN} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow T = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}.$$

Câu 49: [2H3-4] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(7;2;3)$, $B(1;4;3)$, $C(1;2;6)$, $D(1;2;3)$ và điểm M tùy ý. Tính độ dài đoạn OM khi biểu thức $P = MA + MB + MC + \sqrt{3}MD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $OM = \frac{3\sqrt{21}}{4}$. **B.** $OM = \sqrt{26}$. **C.** $OM = \sqrt{14}$. **D.** $OM = \frac{5\sqrt{17}}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{DA} = (6;0;0)$, $\overrightarrow{DB} = (0;2;0)$, $\overrightarrow{DC} = (0;0;3)$ nên tứ diện $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh D . Giả sử $M(x+1; y+2; z+3)$.

$$\text{Ta có } MA = \sqrt{(x-6)^2 + y^2 + z^2} \geq |x-6| \geq 6-x, \quad MB = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2} \geq |y-2| \geq 2-y.$$

$$MC = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2} \geq |z-3| \geq 3-z,$$

$$\sqrt{3}MD = \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \sqrt{(x+y+z)^2} \geq x+y+z.$$

$$\text{Do đó } P \geq (6-x) + (2-y) + (3-z) + (x+y+z) = 11.$$

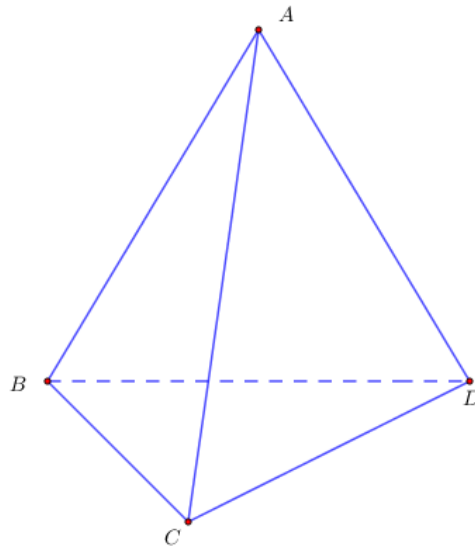
$$\text{Vậy } P \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 11, khi và chỉ khi } \begin{cases} x = y = z = 0 \\ 6-x \geq 0 \\ 2-y \geq 0 \\ 3-z \geq 0 \\ x+y+z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

$$\text{Khi đó } M(1;2;3) \text{ suy ra } OM = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

Câu 50: [1H3-4] Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=3a$, $AC=a\sqrt{15}$, $BD=a\sqrt{10}$, $CD=4a$. Biết rằng góc giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (BCD) bằng 45° , khoảng cách giữa hai đường thẳng

AD và BC bằng $\frac{5a}{4}$ và hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) nằm trong tam giác BCD .

Tính độ dài đoạn thẳng AD .



A. $\frac{5a\sqrt{2}}{4}$.

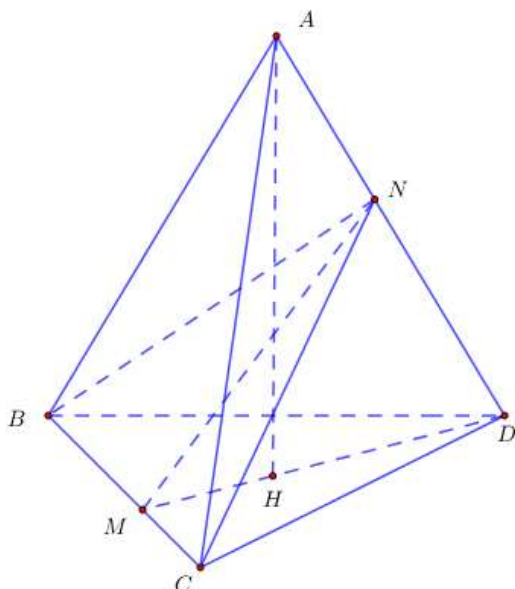
B. $2\sqrt{2}a$.

C. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

D. $2a$.

Lời giải

Chọn D.



Ta xét tích vô hướng

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = AD \cdot AC \cdot \cos A - AD \cdot AB \cdot \cos A \\
 &= AD \cdot AC \cdot \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2AD \cdot AC} - AD \cdot AB \cdot \frac{AD^2 + AB^2 - BD^2}{2AD \cdot AB} \\
 &= \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2} - \frac{AD^2 + AB^2 - BD^2}{2} \\
 &= \frac{AC^2 + BD^2 - CD^2 - AB^2}{2} = \frac{15a^2 + 10a^2 - 16a^2 - 9a^2}{2} = 0 \Rightarrow AD \perp BC.
 \end{aligned}$$

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) và $M = DH \cap BC$ suy ra M nằm giữa B và C .

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AHD) \Rightarrow BC \perp DM.$$

Trong mặt phẳng (ADM) dựng $MN \perp AD$ tại N , suy ra $\begin{cases} MN \perp BC \\ MN \perp AD \end{cases}$ suy ra MN là đoạn vuông góc chung của AD và BC , do đó $d(AD; BC) = MN = \frac{5a}{4}$.

Vì $AH \perp (BCD)$ nên $(AD; (BCD)) = ADH = 45^\circ$. Đồng thời H nằm giữa D và M nên $AMD < 90^\circ$ suy ra N nằm giữa A và D .

$$\text{Ta có } DM = MN \cdot \sqrt{2} = \frac{5a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow BM = \sqrt{BD^2 - DM^2} = \frac{a\sqrt{110}}{4}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} AD \perp MN \\ AD \perp BC \end{cases} \Rightarrow AD \perp (BNC) \Rightarrow AD \perp BN.$$

$$\Rightarrow AN = \sqrt{AB^2 - BN^2} = \sqrt{AB^2 - (BM^2 + MN^2)} = \sqrt{9a^2 - \left(\frac{110a^2}{16} + \frac{25a^2}{16}\right)} = \frac{3a}{4}.$$

Mặt khác vì tam giác DMN vuông cân tại N nên $DN = MN = \frac{5a}{4}$.

Do đó $AD = AN + DN = 2a$.