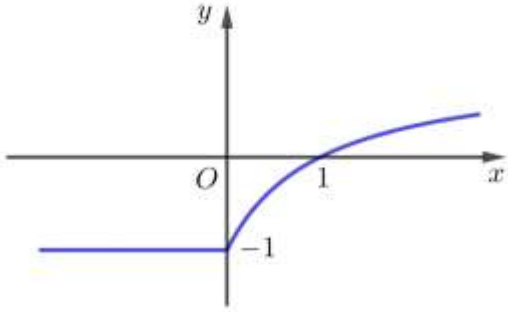
Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1;-3;-5)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

A. $(0;-3;0)$. **B.** $(0;-3;-5)$. **C.** $(0;-3;5)$. **D.** $(1;-3;0)$.

Câu 2. Cho a,b lần lượt là số hạng thứ nhất và thứ năm của một cấp số cộng có công sai $d \neq 0$. Giá trị của $\log_2\left(\frac{b-a}{d}\right)$ bằng

A. $\log_2 5$. **B.** 3. **C.** 2. **D.** $\log_2 3$.

Câu 3. Hình vẽ bên là một phần của đồ thị hàm số nào?



A. $y=\frac{x-1}{|x|+1}$. **B.** $y=\frac{x-1}{|x+1|}$. **C.** $y=\frac{x}{|x|+1}$. **D.** $y=\frac{-x-1}{|x|+1}$.

Câu 4. Lục giác đều $ABCDEF$ có bao nhiêu đường chéo

A. 15. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 24.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vec tơ $\vec{a}=(-1;1;0)$; $\vec{b}=(1;1;0)$ và $\vec{c}=(1;1;1)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\vec{c}\perp\vec{b}$. **B.** $|\vec{c}|=\sqrt{3}$. **C.** $\vec{a}\perp\vec{b}$. **D.** $|\vec{a}|=\sqrt{2}$.

Câu 6: Cho một hình trụ có chiều cao bằng 2 và bán kính đáy bằng 3. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 6π. **B.** 18π. **C.** 15π. **D.** 9π.

Câu 7: Hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Câu 8: Giá trị của $\int_0^3 dx$ bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

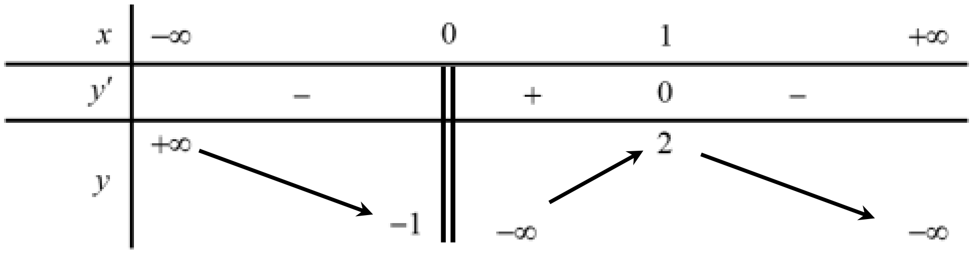
Câu 9: Giá trị của $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x}$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 10: Một khối lập phương có độ dài cạnh bằng 5, thể tích khối lập phương đã cho bằng

A. 243. **B.** 25. **C.** 81. **D.** 125.

Câu 11. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau.



Hàm số đã cho có bao nhiêm điểm cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 12. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x<0$ là

A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 13. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng Oxz ?

A. $y=0$. **B.** $x=0$. **C.** $z=0$. **D.** $y-1=0$.

Câu 14. Điểm nào dưới đây là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+5$?

A. $M(1;3)$. **B.** $Q(3;1)$. **C.** $N(-1;7)$. **D.** $P(7;-1)$.

Câu 15. Nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\cos x$ là

A. $-\sin x+C$. **B.** $\sin x+C$. **C.** $\cos x+C$. **D.** $-\cos x+C$.

Câu 16: Một nhóm gồm 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 học sinh trong nhóm đó. Xác suất để trong 3 học sinh được chọn luôn có học sinh nữ bằng

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 17: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-1}$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(1;\frac{3}{2}\right]$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng đi qua A và vuông góc BC.

A. $x-2y-5z=0$. **B.** $x-2y-5z-5=0$. **C.** $x-2y-5z+5=0$. **D.** $2x-y+5z-5=0$.

Câu 19: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=\sqrt{3}$ và $AA'=1$. Góc tạo bởi giữa đường thẳng AC' và (ABC) bằng

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 75°.

Câu 20: Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0,6\%$/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập làm vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó được lĩnh số tiền không ít hơn 110 triệu đồng (cả vốn ban đầu và lãi), biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi?

A. 17 tháng. **B.** 18 tháng. **C.** 16 tháng. **D.** 15 tháng.

Câu 21. Cho $\int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x = 16$. Tính $\int_{0}^{2} f(2x)\mathrm{d}x$

A. 16. **B.** 4. **C.** 32. **D.** 8.

Câu 22. Hỏi đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x-\sqrt{x+2}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 23. Trên khoảng $(0;1)$ hàm số $y = x^3 + \dfrac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có $AB = 2a$, $SO = a$ với O là giao điểm của AC và BD. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 25. Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{3x-2}{x-1}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\dfrac{|3x-2|}{x-1} = m$ có hai nghiệm thực dương?

A. $-2 < m < 0$. **B.** $m < -3$.

C. $0 < m < 3$. **D.** $m > 3$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông cân đỉnh A và $BC = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (MNA) và (ABC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 27. Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n+1)C_n^n = 2621439$. Số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^n$ bằng

A. 43758. **B.** 31824. **C.** 18564. **D.** 1.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-2;3)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(-2;3)$. Tính $I = \int_{-1}^{2} [f(x) + 2x]\mathrm{d}x$, biết $F(-1) = 1$ và $F(2) = 4$.

A. $I = 6$. **B.** $I = 10$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 9$.

Câu 29. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y=\left(m^2-1\right)x^3+\left(m-1\right)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 30. Biết $\int\limits_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+2\right)\left(x+4\right)}=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 7$, $\left(a,b,c\in\mathbb{Q}\right)$. Giá trị của biểu thức $2a+3b-c$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y=x+m\sqrt{x^2-2x+3}$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có $AB=2$ và $SA=3\sqrt{2}$. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{33}}{4}$. **B.** $\frac{7}{4}$. **C.** 2. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 33. Đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$ qua điểm $I\left(1;1\right)$. Giá trị của biểu thức $g\left(2+\log_a\frac{1}{2018}\right)$ bằng

A. 2016. **B.** -2020. **C.** 2020. **D.** -2016.

Câu 34. Cho các số thực x, y thỏa mãn $\log_8 x+\log_4 y^2=5$ và $\log_4 x^2+\log_8 y=7$. Giá trị của xy bằng

A. 1024. **B.** 256. **C.** 2048. **D.** 512.

Câu 35. Cho hàm số $y=\sin 3x.\cos x-\sin 2x$. Giá trị của $y^{(10)}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ gần nhất với số nào dưới đây?

A. 454492. **B.** 2454493. **C.** 454491. **D.** 454490.

Câu 36. Hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển $\left(x^2-3x+2\right)^6$ bằng

A. -6432. **B.** -4032. **C.** -1632. **D.** -5418.

Câu 37. Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4...;100\}$. Gọi S là tập hợp gồm tất cả các tập con của A, mỗi tập con này gồm 3 phần tử của A và có tổng bằng 91. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của S. Xác suất chọn được phần tử có 3 số lập thành cấp số nhân bằng ?

A. $\frac{4}{645}$. **B.** $\frac{2}{645}$. **C.** $\frac{3}{645}$. **D.** $\frac{1}{645}$.

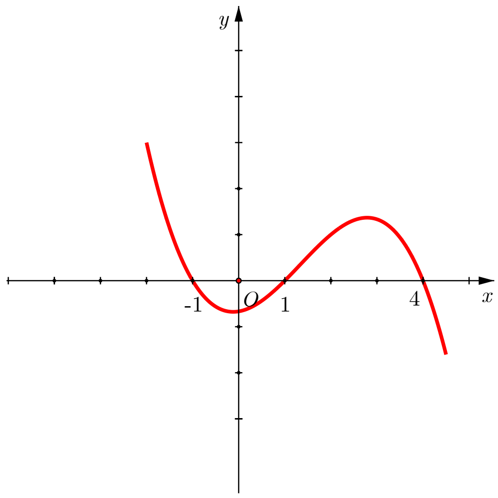
Câu 38. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+mx+m^2}{x-1}$ có hai điểm cực trị A, B. Khi $\angle AOB=90^\circ$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

A. $\frac{1}{16}$. **B.** 8. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** 16.

Câu 39. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị $\left(C\right)$ và điểm $A\left(a;2\right)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng hai tiếp tuyến của $\left(C\right)$ đi qua điểm A và có hệ số góc k_1, k_2 thỏa mãn $k_1+k_2+10k_1^2k_2^2=0$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 7. **B.** $\frac{7-\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Câu 40. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



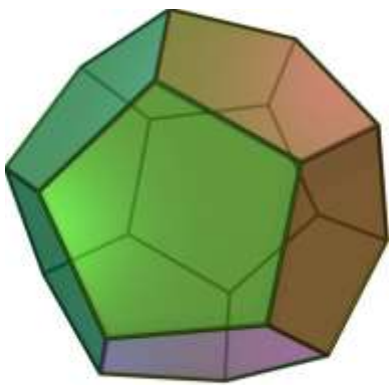
Hàm số $y=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(0;2\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{2};0\right)$. **D.** $\left(-2;-1\right)$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $\left(P\right): x-2y+z-1=0$ và điểm $A\left(0;-2;3\right)$, $B\left(2;0;1\right)$. Điểm $M\left(a;b;c\right)$ thuộc $\left(P\right)$ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất. Giá trị của $a^2+b^2+c^2$ bằng

A. $\frac{41}{4}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 3.

Câu 42. Cho hình thập nhị diện đều (tham khảo hình vẽ bên). Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng có chung một cạnh của thập nhị diện đều bằng



A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 43: Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $2^a+4^b+8^c=4$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+2b+3c$. Giá trị của biểu thức $4^M+\log_M m$ bằng

A. $\frac{2809}{500}$. **B.** $\frac{281}{50}$. **C.** $\frac{4096}{729}$. **D.** $\frac{14}{25}$.

Câu 44: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $SA \perp (ABCD)$, cạnh bên SC tạo với $(ABCD)$ một góc $60°$ và tạo với (SAB) một góc α thỏa mãn $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Thể tích của khối chóp $SABCD$ bằng

A. $\sqrt{3}a^3$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $2a^3$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Câu 45: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$. **B.** $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

C. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$. **D.** $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

Câu 46: Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng 4, diện tích ba mặt bên lần lượt là 9, 18 và 10. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\sqrt[4]{11951}$. **B.** $\frac{\sqrt[4]{11951}}{2}$. **C.** $\sqrt{11951}$. **D.** $\frac{\sqrt{11951}}{2}$.

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;2), B(-1;0;4)$, $C(0;-1;3)$ và điểm M thuộc mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Khi biểu thức $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì độ dài đoạn AM bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** 6. **D.** 2.

Câu 48: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(0;\ 2018\pi)$?

A. 2019. **B.** 1. **C.** 2017. **D.** 2018.

Câu 49: Cho hàm số $f(x)$ xá định trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x = \frac{2-\pi}{2}$.

Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Câu 50: Cho tứ diện $ABCD$ đều có cạnh bằng $2\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ và M là trung điểm AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BG và CM bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{14}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{3}{2\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{10}}$.

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	C	A	C	A	B	D	A	B	D	B	A	A	A	B	A	D	B	C	C	D	C	B	D	A

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
D	C	A	B	D	C	D	D	D	D	D	C	A	A	C	B	C	A	C	B	D	A	C	B	A

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1;-3;-5)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

A. $(0;-3;0)$. **B.** $(0;-3;-5)$. **C.** $(0;-3;5)$. **D.** $(1;-3;0)$.

Lời giải

Chọn B.

Câu 2. Cho a,b lần lượt là số hạng thứ nhất và thứ năm của một cấp số cộng có công sai $d \neq 0$. Giá trị của $\log_2\left(\frac{b-a}{d}\right)$ bằng

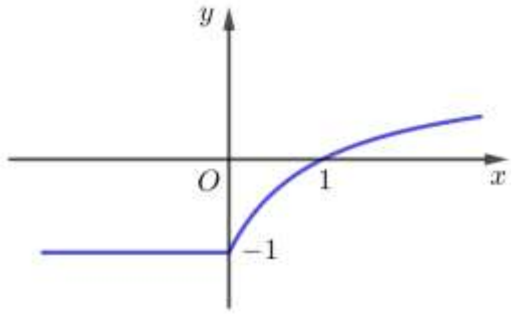
A. $\log_2 5$. **B.** 3. **C.** 2. **D.** $\log_2 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có : $\log_2\left(\frac{b-a}{d}\right) = \log_2\left(\frac{a+4d-a}{d}\right) = \log_2 4 = 2$

Câu 3. Hình vẽ bên là một phần của đồ thị hàm số nào?



A. $y = \frac{x-1}{|x|+1}$. **B.** $y = \frac{x-1}{|x+1|}$. **C.** $y = \frac{x}{|x|+1}$. **D.** $y = \frac{-x-1}{|x|+1}$.

Lời giải

Chọn A.

+) Từ đồ thị, ta có tập xác định hàm số $D = \mathbb{R}$ nên loại phương án **B.**

+) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;0)$ nên loại phương án C, **D.**

Câu 4. Lục giác đều $ABCDEF$ có bao nhiêu đường chéo

A. 15. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 24.

Lời giải

Chọn C

Số đường chéo của lục giác đều (6 cạnh là) : $C_6^2 - 6 = 9$

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vec tơ $\vec{a} = (-1;1;0)$; $\vec{b} = (1;1;0)$ và $\vec{c} = (1;1;1)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\vec{c} \perp \vec{b}$. **B.** $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. **C.** $\vec{a} \perp \vec{b}$. **D.** $|\vec{a}| = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\vec{c}.\vec{b}=2$ nên $\vec{c}\not\perp\vec{b}$

Câu 6: Cho một hình trụ có chiều cao bằng 2 và bán kính đáy bằng 3. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 6π. **B.** 18π. **C.** 15π. **D.** 9π.

Lời giải

Chọn B.

$V=\pi R^2h=\pi.3^2.2=18\pi$.

Câu 7: Hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-4x+1$.

$$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\frac{1}{3}\end{array}\right..$$

BBT:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Câu 8: Giá trị của $\int\limits_0^3 \mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A.

$\int\limits_0^3 \mathrm{d}x=x\Big|_0^3=3$.

Câu 9: Giá trị của $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x}$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x}=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2}{x}\right)=1+\frac{2}{2}=2.$$

Câu 10: Một khối lập phương có độ dài cạnh bằng 5, thể tích khối lập phương đã cho bằng

A. 243. **B.** 25. **C.** 81. **D.** 125.

Lời giải

Chọn D.

Ta thấy y' đổi dấu hai lần. Tuy nhiên tại $x=0$ thì $V=5^3=125$.

Câu 11. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1 $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho có bao nhiêm điểm cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B.

Ta thấy y' đổi dấu hai lần. Tuy nhiên tại $x=0$ thì hàm số không liên tục nên hàm số chỉ có một điểm cực trị.

Câu 12. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x<0$ là

A. $\left(0;1\right)$. **B.** $\left(-\infty;1\right)$. **C.** $\left(1;+\infty\right)$. **D.** $\left(0;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\log_2 x<0\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x<2^0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(0;1\right)$.

Câu 13. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng Oxz ?

A. $y=0$. **B.** $x=0$. **C.** $z=0$. **D.** $y-1=0$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình mặt phẳng Oxz có phương trình là $y=0$.

Câu 14. Điểm nào dưới đây là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+5$?

A. $M\left(1;3\right)$. **B.** $Q\left(3;1\right)$. **C.** $N\left(-1;7\right)$. **D.** $P\left(7;-1\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y'=3x^2-3$ và $y''=6x$.

Cho $y'=0\Rightarrow x=\pm1$.

Tại $x=1\Rightarrow y''(1)=6>0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$. Hay đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(1;3)$.

Câu 15. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x$ là

A. $-\sin x+C$. **B.** $\sin x+C$. **C.** $\cos x+C$. **D.** $-\cos x+C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$.

Câu 16: Một nhóm gồm 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 học sinh trong nhóm đó. Xác suất để trong 3 học sinh được chọn luôn có học sinh nữ bằng

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=C_{10}^3=120$.

Gọi A là biến cố sao cho 3 học sinh được chọn có học sinh nữ,

$\Rightarrow\overline{A}$ là biến cố sao cho 3 học sinh được chọn không có học sinh nữ $\Rightarrow n(\overline{A})=C_6^3=20$.

Vậy xác suất cần tìm $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=\dfrac{5}{6}$.

Câu 17: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-1}$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(1;\frac{3}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn D.

y xác định khi $\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-1\ge0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\le\frac{1}{2}\\x>1\end{cases}\Leftrightarrow1<x\le\frac{3}{2}$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng đi qua A và vuông góc BC.

A. $x-2y-5z=0$. **B.** $x-2y-5z-5=0$. **C.** $x-2y-5z+5=0$. **D.** $2x-y+5z-5=0$.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình mặt phẳng qua $A(2;1;-1)$ nhận $\overrightarrow{BC}=(1;-2-5)$ làm vtpt:

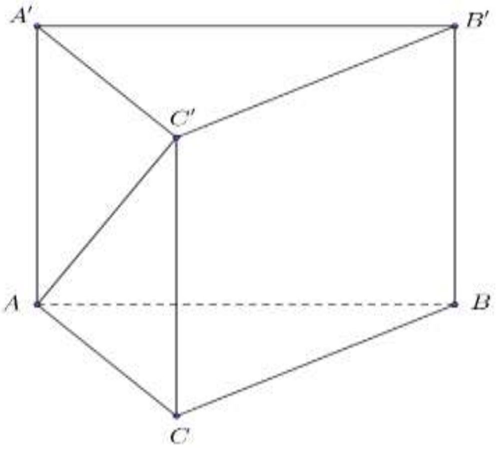
$x-2-2(y-1)-5(z+1)=0 \Leftrightarrow x-2y-5z-5=0$.

Câu 19: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=\sqrt{3}$ và $AA'=1$. Góc tạo bởi giữa đường thẳng AC' và (ABC) bằng

A. 45^o. **B.** 60^o. **C.** 30^o. **D.** 75^o.

Lời giải

Chọn C.



Ta có $(AC',(ABC))=(AC',AC)=CAC'$, $\tan C'AC=\dfrac{CC'}{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow C'AC=30^o$.

Câu 20: Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0,6\%$/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập làm vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó được lĩnh số tiền không ít hơn 110 triệu đồng (cả vốn ban đầu và lãi), biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi?

A. 17 tháng. **B.** 18 tháng. **C.** 16 tháng. **D.** 15 tháng.

Lời giải

Chọn C.

Công thức lãi kép $P_n=P(1+r)^n \Rightarrow P_n=100(1+0,006)^n \Rightarrow 100(1+0,006)^n>110$

$\Leftrightarrow 1,006^n>\dfrac{11}{10} \Leftrightarrow n>\log_{1,006}\dfrac{11}{10} \Rightarrow n=16$ tháng.

Câu 21. Cho $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=16$. Tính $\int\limits_0^2 f(2x)\mathrm{d}x$

A. 16. **B.** 4. **C.** 32. **D.** 8.

Xét tích phân $\int\limits_0^2 f(2x)\mathrm{d}x$ ta có

Đặt $2x=t \Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$. Khi $x=0$ thì $t=0$; khi $x=2$ thì $t=4$.

Do đó $\int\limits_0^2 f(2x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^4 f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}.16=8$.

Câu 22. Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-\sqrt{x+2}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x\ge -2 \\ x\ne 2 \end{cases}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to +\infty} y = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-1}{x-\sqrt{x+2}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}} = 1$ nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang.

Vì $\lim\limits_{x\to 2^+} y = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-1}{x-\sqrt{x+2}} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-1)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}{x^2-x-2} = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to 2^-} y = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-1}{x-\sqrt{x+2}} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x-1)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}{x^2-x-2} = -\infty$.

Nên đường thẳng $x=2$ là đường tiệm cận đứng.

Câu 23. Trên khoảng $(0;1)$ hàm số $y=x^3+\dfrac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B.

__Cách 1__:

Do $x\in(0;1)$ nên $x^3>0$ và $\dfrac{1}{x}>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cau-chy cho bốn số dương x^3, $\dfrac{1}{3x}$, $\dfrac{1}{3x}$, $\dfrac{1}{3x}$ ta có

$x^3+\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{3x}\ge 4\sqrt[4]{x^3.\dfrac{1}{3x}.\dfrac{1}{3x}.\dfrac{1}{3x}} \Leftrightarrow x^3+\dfrac{1}{x}\ge 4\sqrt[4]{\dfrac{1}{27}}$.

Dấu "$=$" xảy ra khi $x^3=\dfrac{1}{3x} \Leftrightarrow x^4=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

__Cách 2__: Ta có $y'=3x^2-\dfrac{1}{x^2}$;

Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 3x^4 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Do $x \in (0;1)$ nên $\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

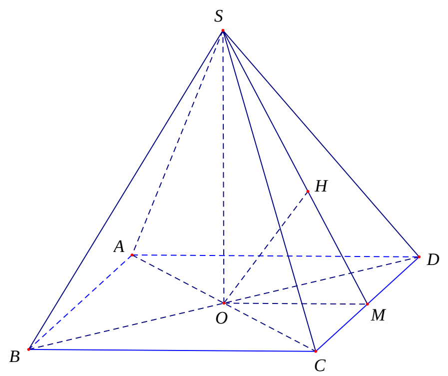
Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có $AB = 2a$, $SO = a$ với O là giao điểm của AC và BD. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

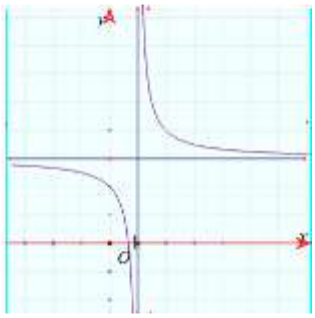


Gọi M là trung điểm của cạnh CD, ta có $\begin{cases} CD \perp OM \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM) \Rightarrow (SCD) \perp SOM$.

Trong mặt phẳng (SOM) kẻ $OH \perp SM$, $(H \in SM)$ thì OH là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SCD).

Ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 25. Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{3x-2}{x-1}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\dfrac{|3x-2|}{x-1}=m$ có hai nghiệm thực dương?



A. $-2<m<0$. **B.** $m<-3$.

C. $0<m<3$. **D.** $m>3$.

Lời giải

Chọn A.

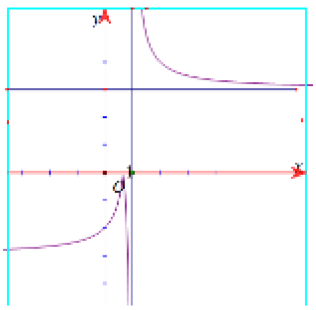
Số nghiệm của phương trình $\dfrac{|3x-2|}{x-1}=m$ bằng số giao điểm của đồ thị $y=\dfrac{|3x-2|}{x-1}$ (C') và đường thẳng $y=m$ (d).

Do $\dfrac{|3x-2|}{x-1}=\begin{cases}\dfrac{3x-2}{x-1} \text{ khi } x\ge\dfrac{2}{3}\\ -\dfrac{3x-2}{x-1} \text{ khi } x<\dfrac{2}{3}\end{cases}$ nên đồ thị (C') có được bằng cách

Giữ nguyên phần đồ thị $y=\dfrac{3x-2}{x-1}$ ứng với phần $x\ge\dfrac{2}{3}$.

Lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ thị $y=\dfrac{3x-2}{x-1}$ ứng với phần $x<\dfrac{2}{3}$.

Hợp của hai phần đồ thị là (C').



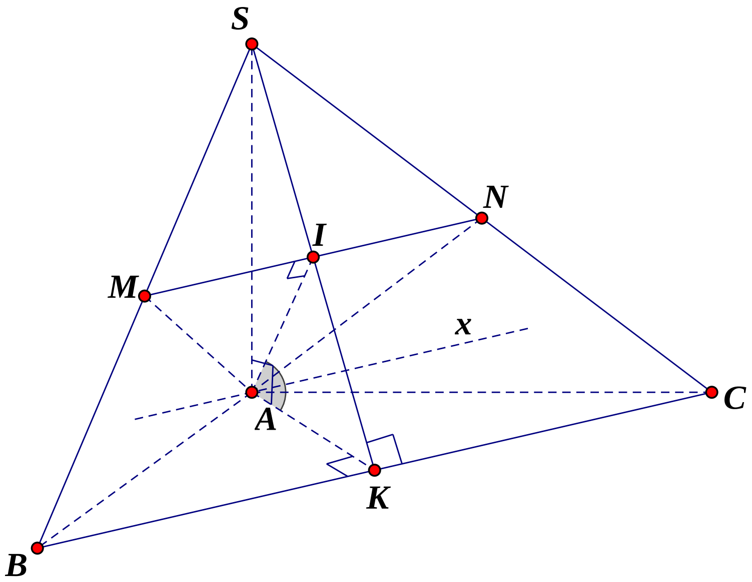
Từ đồ thị ta có phương trình $\dfrac{|3x-2|}{x-1}=m$ có hai nghiệm dương phân biệt khi $-2<m<0$

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=a$, $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông cân đỉnh A và $BC=a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (MNA) và (ABC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.　　　　**B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.　　　　**C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　　　　**D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi I , K lần lượt là trung điểm của MN và BC.

$\Rightarrow$ I là trung điểm của SK.

Ta có $(AMN) \cap (ABC) = Ax \,//\, MN \,//\, BC$.

ΔABC cân tại A $\Rightarrow AK \perp BC \Rightarrow AK \perp Ax$.

ΔAMN cân tại A $\Rightarrow AI \perp MN \Rightarrow AI \perp Ax$.

Do đó $\left((AMN),(ABC)\right) = (AI, AK) = IAK$ hoặc bù với góc IAK

ΔABC vuông tại A có AK là đường trung tuyến nên $AK = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

ΔSAK vuông tại A có AI là đường trung tuyến nên

$$AI = IK = \frac{SK}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AK^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{2}}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Xét ΔAIK có $\cos IAK = \dfrac{IA^2 + AK^2 - IK^2}{2IA.AK} = \dfrac{\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2}{2.\dfrac{a\sqrt{6}}{4}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 27. Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n+1)C_n^n = 2621439$. Số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^n$ bằng

A. 43758.　　　　**B.** 31824.　　　　**C.** 18564.　　　　**D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

Ta có:

$x(1+x)^n = C_n^0 x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + ... + C_n^n x^{n+1}$.

Lấy đạo hàm hai vế ta được:

$\left(x+1\right)^n+nx\left(x+1\right)^{n-1}=C_n^0+2C_n^1x+3C_n^2x^2+...+\left(n+1\right)C_n^nx^n$.

Cho $x=1$, ta có

$C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+\left(n+1\right)C_n^n=2^n+n2^{n-1}=2^{n-1}\left(2+n\right)$.

$\Rightarrow 2^{n-1}\left(2+n\right)-1=2621439 \Leftrightarrow 2^{n-1}\left(2+n\right)=2621440 \Leftrightarrow 2^n=\dfrac{2621440}{2+n}.2$. (*)

Xét $f\left(n\right)=2^n$ là hàm số đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$ và $g\left(n\right)=2.\dfrac{2621440}{2+n}$ là hàm số nghịch biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Ta có $f\left(18\right)=g\left(18\right)\Rightarrow n=18$ là nghiệm duy nhất của (*).

Khi đó số hạng tổng quát của khai triển $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{18}$ là: $C_{18}^kx^{36-3k}$ với $k\in\mathbb{Z}, 0\le k\le 18$.

Vậy số hạng không chứa x là $C_{18}^{12}=18564$.

Câu 28. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên khoảng $\left(-2;3\right)$. Gọi $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên khoảng $\left(-2;3\right)$. Tính $I=\int\limits_{-1}^{2}\left[f\left(x\right)+2x\right]\mathrm{d}x$, biết $F\left(-1\right)=1$ và $F\left(2\right)=4$.

A. $I=6$. **B.** $I=10$. **C.** $I=3$. **D.** $I=9$.

Lời giải

Chọn A.

$I=\int\limits_{-1}^{2}\left[f\left(x\right)+2x\right]\mathrm{d}x=F\left(x\right)\Big|_{-1}^{2}+x^2\Big|_{-1}^{2}=F\left(2\right)-F\left(-1\right)+\left(4-1\right)=4-1+3=6$.

Câu 29. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y=\left(m^2-1\right)x^3+\left(m-1\right)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

*Với $m=1$ ta có: $y=-x+4$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

*Với $m=-1$ ta có: $y=-2x^2-x+4$ là hàm số bậc hai, không nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

*Với $m\ne\pm1$ ta có $y'=3\left(m^2-1\right)x^2+2\left(m-1\right)x-1$

Hàm số $y=\left(m^2-1\right)x^3+\left(m-1\right)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$.

$\Leftrightarrow y'=3\left(m^2-1\right)x^2+2\left(m-1\right)x-1\le 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1<0 \\ \left(m-1\right)^2+3\left(m^2-1\right)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<1 \\ -\dfrac{1}{2}\le m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\le m<1 \Rightarrow m=0.$$

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m.

Câu 30. Biết $\int\limits_0^3\dfrac{\mathrm{d}x}{\left(x+2\right)\left(x+4\right)}=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 7$, $\left(a,b,c\in\mathbb{Q}\right)$. Giá trị của biểu thức $2a+3b-c$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D.

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)(x+4)} = \frac{1}{2}\int_0^3 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\ln|x+2| - \ln|x+4|\right)\Big|_0^3 = \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 7 + \frac{1}{2}\ln 2.$$

Khi đó: $2a+3b-c = 2.\frac{1}{2} + 3.\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$.

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y = x + m\sqrt{x^2-2x+3}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y' = 1 + m\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì $y' \ge 0, \forall x \in (-\infty;+\infty)$

$\Leftrightarrow 1 + m\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}} \ge 0, \forall x \in (-\infty;+\infty)$ (1).

Nếu $x=1$ thì (1) luôn thỏa $\forall m$.

Nếu $x>1$ thì $(1) \Leftrightarrow m \ge -\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x-1} \Leftrightarrow m \ge -\sqrt{1+\frac{2}{(x-1)^2}} \Leftrightarrow m \ge -1$.

Nếu $x<1$ thì $(1) \Leftrightarrow m \le -\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x-1} \Leftrightarrow m \le \sqrt{1+\frac{2}{(x-1)^2}} \Leftrightarrow m \le 1$.

Vậy $-1 \le m \le 1$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1;0;1\}$.

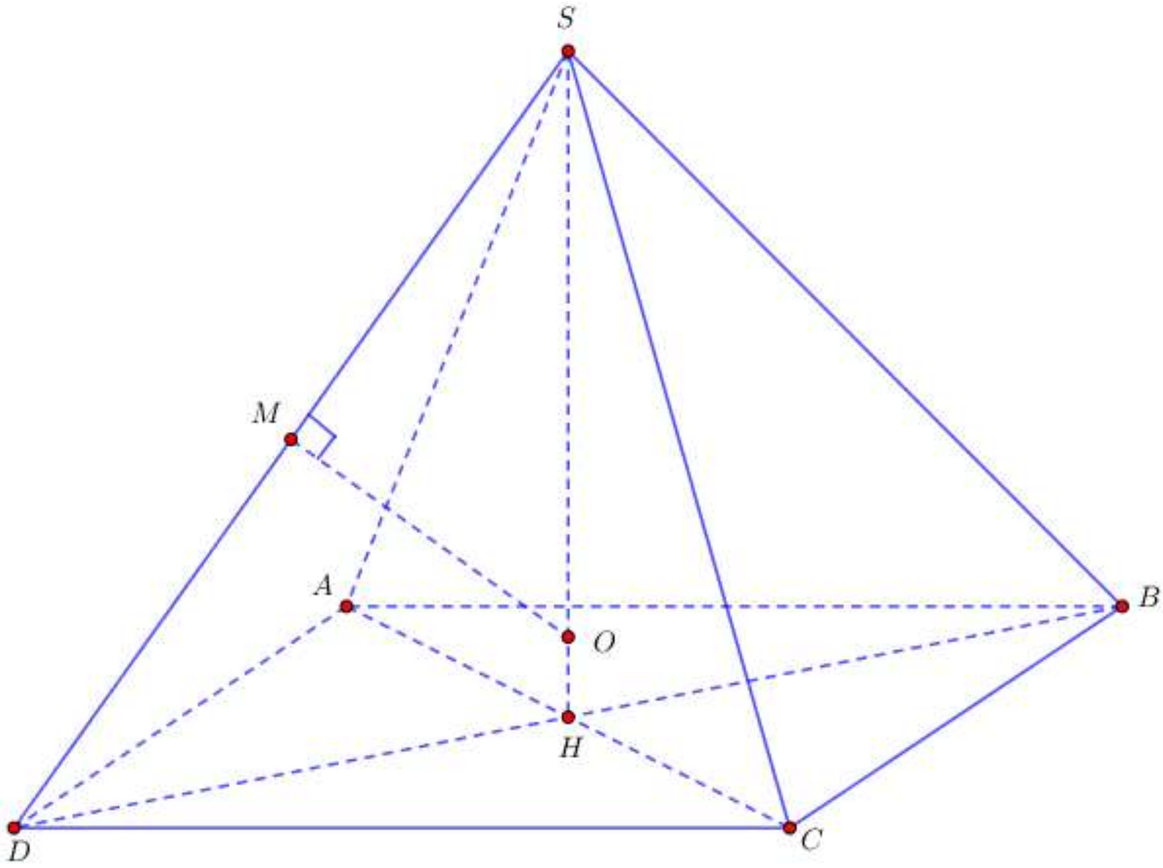
Do đó có 3 giá trị nguyên m cần tìm.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có $AB=2$ và $SA = 3\sqrt{2}$. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{33}}{4}$. **B.** $\frac{7}{4}$. **C.** 2. **D.** $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn D.



Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi H là tâm đáy thì SH là trục của hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của SD, trong mp (SDH) kẻ đường trung trực của đoạn SD cắt SH tại O thì $OS = OA = OB = OC = OD$ nên O chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Bán kính mặt cầu là $R = SO$.

Ta có $\Delta SMO \backsim \Delta SHD \Rightarrow \dfrac{SO}{SD} = \dfrac{SM}{SH} \Rightarrow R = SO = \dfrac{SD.SM}{SH} = \dfrac{SD^2}{2SH}$.

Với $SH^2 = SD^2 - HD^2 = 18 - 2 = 16 \Rightarrow SH = 4$.

Vậy $R = \dfrac{SD^2}{2SH} = \dfrac{9}{4}$.

Câu 33. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = a^x\ (a > 0, a \neq 1)$ qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $g\left(2 + \log_a \dfrac{1}{2018}\right)$ bằng

A. 2016. **B.** -2020. **C.** 2020. **D.** -2016.

Lời giải

Chọn D.

Gọi $M(x;y)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = a^x\ (a > 0, a \neq 1)$ và $M'(x';y')$ là ảnh của $M(x;y)$ qua phép đối xứng tâm $I(1;1)$. Khi đó ta có $\begin{cases} x + x' = 2 \\ y + y' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = 2 - y' \end{cases}$.

Vì $M\left(x;y\right)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y=a^x\ (a>0,a\neq 1)$ nên ta có $2-y'=a^{2-x'}$

$\Leftrightarrow y'=2-a^{2-x'}$.

Vậy $y=g\left(x\right)=2-a^{2-x}$ suy ra $g\left(2+\log_a\dfrac{1}{2018}\right)=2-a^{2-\left(2+\log_a\frac{1}{2018}\right)}=-2016$.

Câu 34. Cho các số thực x,y thỏa mãn $\log_8 x+\log_4 y^2=5$ và $\log_4 x^2+\log_8 y=7$. Giá trị của xy bằng

A. 1024. **B.** 256. **C.** 2048. **D.** 512.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện : $\begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}\log_8 x+\log_4 y^2=5\\ \log_4 x^2+\log_8 y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{3}\log_2 x+\log_2 y=5\\ \log_2 x+\dfrac{1}{3}\log_2 y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2 x=6\\ \log_2 y=3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2^6\\y=2^3\end{cases}\Leftrightarrow xy=512$.

Câu 35. Cho hàm số $y=\sin 3x.\cos x-\sin 2x$. Giá trị của $y^{(10)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ gần nhất với số nào dưới đây?

A. 454492. **B.** 2454493. **C.** 454491. **D.** 454490.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y=\sin 3x.\cos x-\sin 2x=\dfrac{1}{2}\left(\sin 4x+\sin 2x\right)-\sin 2x=\dfrac{1}{2}\left(\sin 4x-\sin 2x\right)$

Mặt khác theo quy nạp ta chứng minh được $\left(\sin ax\right)^{(n)}=\left(-1\right)^{n-1}a^n\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}-ax\right)$

Do đó $y^{(10)}\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\left(\left(-1\right)^9 4^{10}.\sin\left(5\pi-4x\right)-\left(-1\right)^9.2^{10}.\sin\left(5\pi-2x\right)\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(-4^{10}.\sin 4x+2^{10}\sin 2x\right)$

$\Rightarrow y^{(10)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\approx 454490.13$

Câu 36. Hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển $\left(x^2-3x+2\right)^6$ bằng

A. -6432. **B.** -4032. **C.** -1632. **D.** -5418.

Lời giải

Chọn D

$\left(x^2-3x+2\right)^6=\left(x-1\right)^6\left(x-2\right)^6$

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x-1\right)^6$ là $C_6^k.x^k\left(-1\right)^{6-k}$ với $k=0;1;2...;6$.

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x-2\right)^6$ là $C_6^i.x^i\left(-2\right)^{6-i}$ với $i=0;1;2...;6$.

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^2-3x+2\right)^6=\left(x-1\right)^6\left(x-2\right)^6$ là $C_6^k x^k\left(-1\right)^{6-k}.C_6^i x^i\left(-2\right)^{6-i}$

$=C_6^k C_6^i x^{i+k}\left(-1\right)^{12-i-k}.\left(2\right)^{6-i}$

Số hạng chứa x^7 ứng với $i+k=7$. Kết hợp với điều kiện ta được các nghiệm

$i=1\Rightarrow k=6\Rightarrow$ hệ số là $=C_6^6C_6^1\left(-1\right)^5.\left(2\right)^5=-192$

$i=2\Rightarrow k=5\Rightarrow$ hệ số là $=C_6^5C_6^2\left(-1\right)^5.\left(2\right)^4=-1440$

$i=3\Rightarrow k=4\Rightarrow$ hệ số là $=C_6^4C_6^3\left(-1\right)^5.\left(2\right)^3=-2400$

$i=4\Rightarrow k=3\Rightarrow$ hệ số là $=C_6^3C_6^4\left(-1\right)^5.\left(2\right)^2=-1200$

$i=5\Rightarrow k=2\Rightarrow$ hệ số là $=C_6^2C_6^5\left(-1\right)^5.\left(2\right)^1=-180$

$i=6\Rightarrow k=1\Rightarrow$ hệ số là $=C_6^1C_6^6\left(-1\right)^5.\left(2\right)^0=-6$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển $\left(x^2-3x+2\right)^6$ bằng -5418

Cách 2.

$\left(x^2-3x+2\right)^6=\left(x^2+\left(-3x+2\right)\right)^6$

Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $C_6^k.\left(x^2\right)^{6-k}\left(-3x+2\right)^k$ với $k=0;1;2...;6$.

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(-3x+2\right)^k$ là $C_k^i.2^{k-i}\left(-3x\right)^i$ với $0\le i\le k$.

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^2-3x+2\right)^6$ là $C_6^k.\left(x^2\right)^{6-k}C_k^i.2^{k-i}\left(-3x\right)^i$

$=C_6^kC_k^i.2^{k-i}\left(-3\right)^i.\left(x^{12-2k+i}\right)$

Số hạng chứa x^7 ứng với $12-2k+i=7\Leftrightarrow 2k-i=5$. Kết hợp với điều kiện ta được các nghiệm

$k=3\Rightarrow i=1\Rightarrow$ hệ số là $=C_6^3C_3^1 2^2\left(-3\right)^1=-720$

$k=4\Rightarrow i=3\Rightarrow$ hệ số là $=C_6^4C_4^3\left(-3\right)^3.\left(2\right)^1=-3240$

$k=5\Rightarrow i=5\Rightarrow$ hệ số là $=C_6^5C_5^5\left(2\right)^0.\left(-3\right)^5=-1458$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển $\left(x^2-3x+2\right)^6$ bằng -5418.

Câu 37. Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4...;100\}$. Gọi S là tập hợp gồm tất cả các tập con của A, mỗi tập con này gồm 3 phần tử của A và có tổng bằng 91. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của S. Xác suất chọn được phần tử có 3 số lập thành cấp số nhân bằng ?

A. $\frac{4}{645}$. **B.** $\frac{2}{645}$. **C.** $\frac{3}{645}$. **D.** $\frac{1}{645}$.

Lời giải

Chọn C.

Giả sử tập con bất kì $\{a,b,c\}\in S$

$\Rightarrow 1\le a,b,c\le 100$; a,b,c phân biệt.

$a+b+c=91$.

Đây là bài toán chia kẹo Euler nên số bộ a,b,c là : C_{91-1}^{3-1}

Tuy nhiên trong các bộ trên vẫn chứa các bộ có 2 chữ số giống nhau, số bộ có 2 chữ số giống nhau là $3.45=135$ (bộ). Vậy $n\left(\Omega\right)=\left(C_{90}^2-3.45\right):3!=645$.

Gọi A là biến cố : "a,b,c lập thành cấp số nhân"

Gọi q là công bội của cấp số nhân theo bài ra ta có $q>0$

$a+aq+aq^2=91$

$\Leftrightarrow a\left(1+q+q^2\right)=1.91=13.7$

Trường hợp 1: $\begin{cases}a=1\\1+q+q^2=91\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\q=9\end{cases}$

Trường hợp 2: $\begin{cases}a=91\\1+q+q^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=91\\q=0\end{cases}$ (loại)

Trường hợp 3: $\begin{cases}a=13\\1+q+q^2=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=13\\q=2\end{cases}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 3: $\begin{cases}a=7\\1+q+q^2=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=7\\q=3\end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy $n(A)=3$.

$P(A)=\dfrac{3}{645}$.

Câu 38. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+m^2}{x-1}$ có hai điểm cực trị A,B. Khi $\angle AOB=90^\circ$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

A. $\dfrac{1}{16}$. **B.** 8. **C.** $\dfrac{1}{8}$. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A.

$y'=\dfrac{(2x+m)(x-1)-x^2-mx-m^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-\left(m+m^2\right)}{(x-1)^2}$

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B thì $y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=1+m+m^2>0\\-1-m-m^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\forall m\in\mathbb{R}$.

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực đại , cực tiểu là $y_A=2x+m$.

Gọi $x_A;\,x_B$ là hoành độ của A, B khi đó $x_A;\,x_B$ là nghiệm của $x^2-2x-\left(m+m^2\right)$.

Theo định lí Viet ta có $x_A+x_B=2$; $x_A.x_B=-m^2-m$.

$y_A=2x_A+m;\, y_B=2x_B+m$.

$\angle AOB=90^\circ\Rightarrow x_A.x_B+y_A.y_B=0\Leftrightarrow x_Ax_B+4x_Ax_B+2m\left(x_A+x_B\right)+m^2=0$

$\Leftrightarrow 5\left(-m^2-m\right)+4m+m^2=0\Leftrightarrow -4m^2-m=0\Leftrightarrow m=0;m=-\dfrac{1}{4}$.

Tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng: $0^2+\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$.

Câu 39. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;2)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng hai tiếp tuyến của (C) đi qua điểm A và có hệ số góc k_1, k_2 thỏa mãn $k_1+k_2+10k_1^2k_2^2=0$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 7. **B.** $\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

Gọi tọa độ tiếp điểm là $M\left(t;\dfrac{t+1}{t-1}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến tại M là $y=(x-t)\dfrac{-2}{(t-1)^2}+\dfrac{t+1}{t-1}$.

Do tiếp tuyến đi qua $A(a;2)$ nên ta có $2=(a-t)\dfrac{-2}{(t-1)^2}+\dfrac{t+1}{t-1}\Rightarrow t^2-6t+3+2a=0 \quad (1)$.

Gọi t_1, t_2 là hai nghiệm của (1) suy ra $k_1=\dfrac{-2}{(t_1-1)^2}$ và $k_2=\dfrac{-2}{(t_2-1)^2}$.

$k_1+k_2+10k_1^2k_2^2=0\Leftrightarrow\dfrac{-2}{(t_1-1)^2}+\dfrac{-2}{(t_2-1)^2}+10\dfrac{4}{(t_1-1)^4}\cdot\dfrac{4}{(t_2-1)^4}=0$

$\Rightarrow\left[(t_1-1)^2+(t_2-1)^2\right](t_1-1)^2(t_2-1)^2=80$

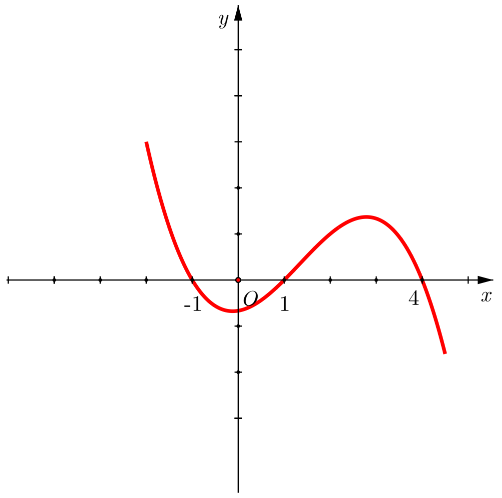
$\Rightarrow\left[(t_1+t_2)^2-2t_1t_2-2(t_1+t_2)+2\right][t_1t_2-t_1-t_2+1]^2=80$.

Mặt khác theo viet có $t_1+t_2=6$ và $t_1t_2=3+2a$.

Thay vào ta có $(20-4a)(2a-2)^2=80\Rightarrow(5-a)(a-1)^2=5\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ a=\dfrac{7\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$.

Vậy chọn A.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $y=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $\left(-\frac{1}{2};0\right)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn C.

$\left(f\left(x^2\right)\right)'=2x.f'\left(x^2\right)$. Ta có $\left(f\left(x^2\right)\right)'=0 \Leftrightarrow 2x.f'\left(x^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=1 \\ x^2=4 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	
y		↗		↘		↗		↘		↗		↘	

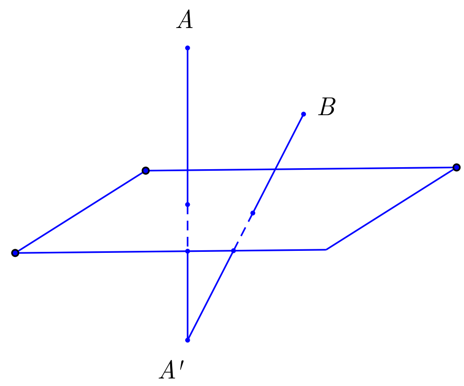
Chọn C.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+z-1=0$ và điểm $A(0;-2;3)$, $B(2;0;1)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất. Giá trị của $a^2+b^2+c^2$ bằng

A. $\frac{41}{4}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

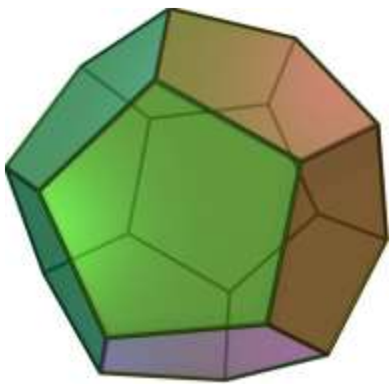


Ta có A, B cùng nằm về một phía của (P). Gọi A' đối xứng với A qua (P) suy ra $A'(-2;2;1)$
.

Ta có $MA + MB = MA' + MB \geq BA'$. Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của BA' và (P).

Xác định được $M\left(1;\frac{1}{2};1\right)$. Suy ra chọn B.

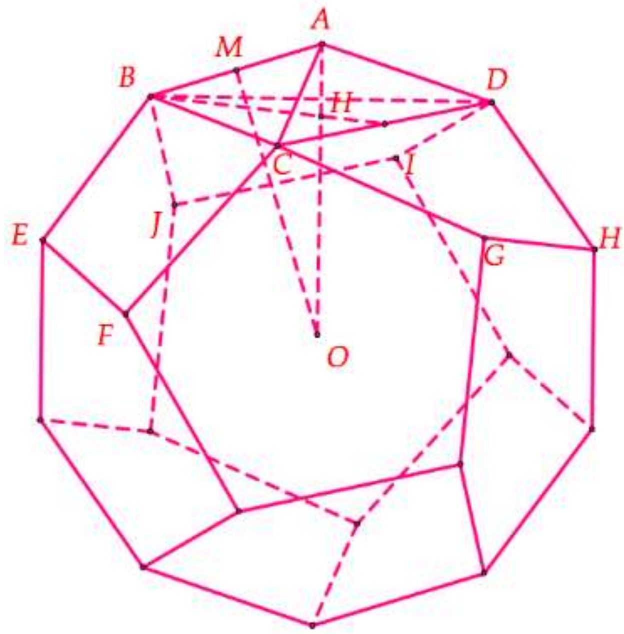
Câu 42. Cho hình thập nhị diện đều (tham khảo hình vẽ bên). Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng có chung một cạnh của thập nhị diện đều bằng

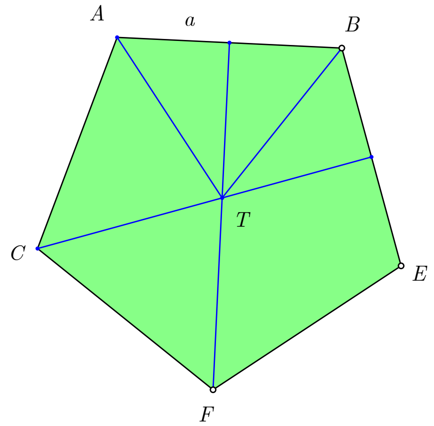


A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C.





Bước 1: Lập mối quan hệ giữa bán kính mặt cầu và cạnh khối 12 mặt đều:

Gọi O là tâm khối 12 mặt đều, xét 3 mặt phẳng chung đỉnh A là $ABEFC, ACGHD, ABJID$.

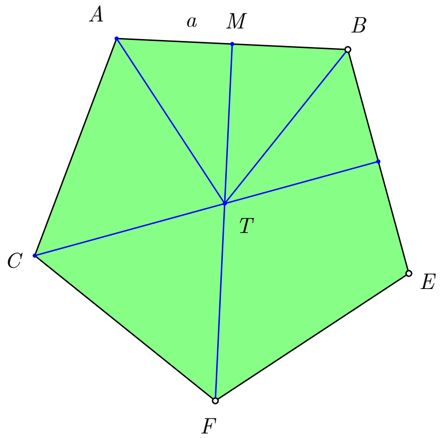
Khi đó $A.BCD$ là chóp tam giác đều và OA vuông góc với $\left(BCD\right)$.

Ta có $BC = CD = DB = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$.

$AH = \sqrt{AB^2 - \frac{BC^2}{3}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}a$.

Ta có $AH.AO = AB.AM \Rightarrow R = AO = \frac{AB^2}{2AH} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1}$.

Bước 2: Tính khoảng cách từ tâm một mặt đến cạnh của nó:



Ta có $BAT = \frac{3\pi}{10}$. $AM = \frac{a}{2}$.

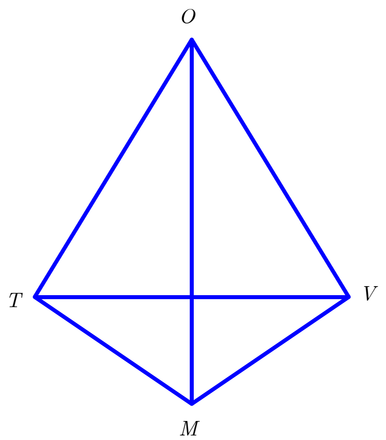
Suy ra $MT = AM.\tan\frac{3\pi}{10}$.

Bước 3: Tính góc:

Gọi tâm của các mặt $ABEFC$ và $ABJID$ là T, V.

Có OT, OV vuông góc với hai mặt này nên góc giữa hai mặt bằng góc giữa OT và OV.

Lại có O, T, M, V cùng thuộc một mặt phẳng (trung trực của AB).



Có $OT \perp TM$ và $OV \perp VM$.

$$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1}\right)^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)a}{2\left(\sqrt{5}-1\right)};\ MT = AM.\tan\frac{3\pi}{10}.$$

Suy ra $\sin TOM = \dfrac{TM}{OM} = \dfrac{\left(\sqrt{5}-1\right)\tan 54^\circ}{\left(\sqrt{5}+1\right)}$.

Vậy $\cos TOV = 1 - 2\sin^2 TOM = \dfrac{\sqrt{5}-1}{5-\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 43: Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $2^a + 4^b + 8^c = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + 2b + 3c$. Giá trị của biểu thức $4^M + \log_M m$ bằng

A. $\dfrac{2809}{500}$. **B.** $\dfrac{281}{50}$. **C.** $\dfrac{4096}{729}$. **D.** $\dfrac{14}{25}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $a = \log_2 x,\ 2b = \log_2 y,\ 3c = \log_2 z$. Ta có $S = \log_2(xyz)$.

- $4 = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \leq \left(\dfrac{4}{3}\right)^3 \Leftrightarrow S \leq 3\log_2\left(\dfrac{4}{3}\right)$

  $MaxS = M = 3\log_2\left(\dfrac{4}{3}\right),\ khi\ x = y = z = \dfrac{4}{3}$

- Gọi $z = \min(x, y, z) \Rightarrow 1 \leq z \leq \dfrac{4}{3}$.

  Do $(x-1)(y-1) \geq 0 \Rightarrow xy \geq x + y + 1 = 3 - z \Rightarrow xyz \geq z(3-z) \geq 2$ (vì $z \in \left[1; \dfrac{4}{3}\right]$

Suy ra $S \ge 1$, do đó $m = \min S = 1$ khi $x = z = 1, y = 2$

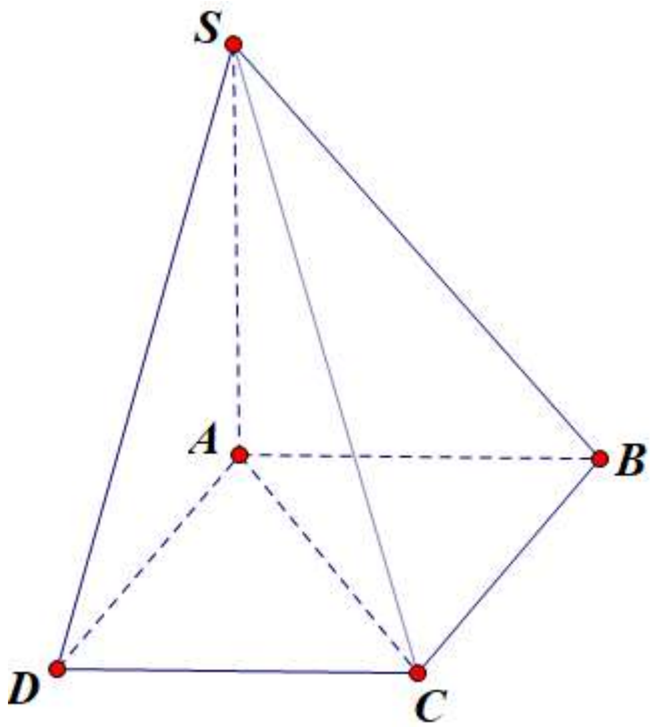
$$4^M + \log_M m = 4^{3\log_2\left(\frac{4}{3}\right)} + \log_{3\log_2\left(\frac{4}{3}\right)} 1 = \frac{4096}{729}.$$

Câu 44: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $SA \perp (ABCD)$, cạnh bên SC tạo với $(ABCD)$ một góc $60°$ và tạo với (SAB) một góc α thỏa mãn $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Thể tích của khối chóp $SABCD$ bằng

A. $\sqrt{3}a^3$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $2a^3$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



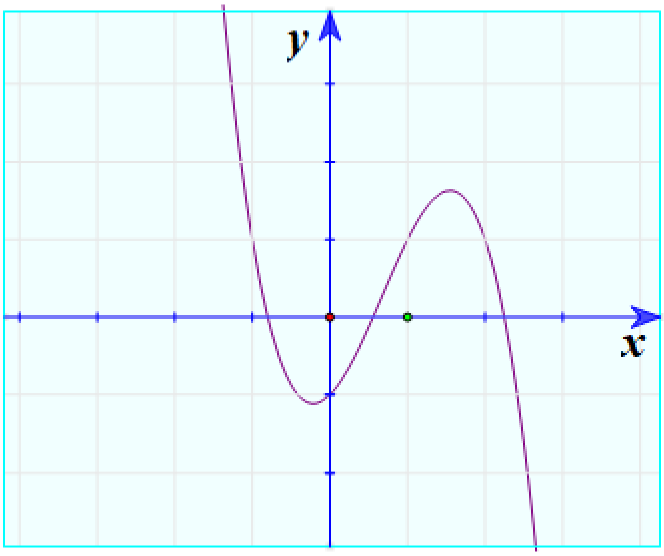
Theo bài ra ta có $SCA = 60°$, $BSC = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{BC}{SC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Đặt $BC = x$, ta có $SC = \frac{4x}{\sqrt{3}}$, $AC = \sqrt{a^2 + x^2}$.

$\cos 60° = \frac{AC}{SC} \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{3}} = \sqrt{a^2 + x^2} \Leftrightarrow x = a\sqrt{3} \Rightarrow AC = 2a \Rightarrow SA = AC\tan 60° = 2a\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $SABCD$ bằng $V = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.2a\sqrt{3}.a^2\sqrt{3} = 2a^3$.

Câu 45: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a<0,b<0,c>0,d<0$.

B. $a<0,b>0,c>0,d<0$.

C. $a<0,b<0,c<0,d<0$.

D. $a<0,b>0,c<0,d<0$.

Lời giải

Chọn B

$y=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow y'=3ax^2+2bx+c$.

Từ đồ thị ta có: hàm số có hai điểm cực trị $\begin{cases}x_1<0<x_2\\|x_1|<x_2\end{cases}$, đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm và $\lim\limits_{x\to+\infty}y=-\infty$.

Suy ra $\begin{cases}a<0\\d<0\\x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}>0\\x_1.x_2=\dfrac{c}{3a}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\d<0\\b>0\\c>0\end{cases}$.

Câu 46: Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng 4, diện tích ba mặt bên lần lượt là 9, 18 và 10. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\sqrt[4]{11951}$.

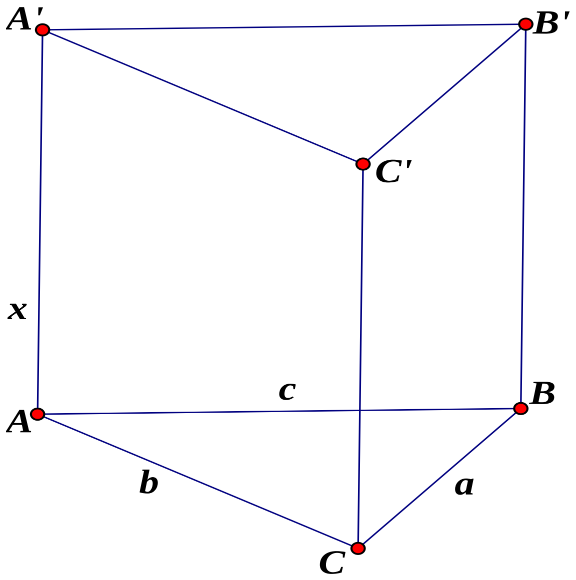
B. $\dfrac{\sqrt[4]{11951}}{2}$.

C. $\sqrt{11951}$.

D. $\dfrac{\sqrt{11951}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Đặt $AA' = x,\ AB = c,\ AC = b,\ BC = a$.

Ta có : $\begin{cases} xc = 18 \\ xb = 9 \\ xa = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2b \\ a = \dfrac{10}{9}b \end{cases}$.

Ta lại có $S_{ABC} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 4$, với $p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{37}{18}b$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{37}{18}b\left(\dfrac{37}{18}b - \dfrac{10}{9}b\right)\left(\dfrac{37}{18}b - b\right)\left(\dfrac{37}{18}b - 2b\right)} = 4$

$\Leftrightarrow b = \dfrac{1296}{\sqrt{11951}}$. Suy ra $x = \dfrac{\sqrt{11951}}{8}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$: $V = AA'.S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{11951}}{2}$.

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;2), B(-1;0;4)$, $C(0;-1;3)$ và điểm M thuộc mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Khi biểu thức $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì độ dài đoạn AM bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có $G(0;0;3)$ và $G \notin (S)$.

Khi đó : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2$

$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2$

$= 3MG^2 + 6$.

Do đó $\left(MA^2 + MB^2 + MC^2\right)_{\min} \Leftrightarrow MG$ ngắn nhất

Ta lại có, mặt cầu (S) có bán kính $R = 1$ tâm $I(0;0;1)$ thuộc trục Oz, và (S) qua O.

Mà $G \in Oz$ nên MG ngắn nhất khi $M = Oz \cap (S)$. Do đó $M(0;0;2)$.

Vậy $MA = \sqrt{2}$.

Câu 48: Biết $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F\left(x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $\left(0;\ 2018\pi\right)$?

A. 2019. **B.** 1. **C.** 2017. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F'\left(x\right)=f\left(x\right)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

$F'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x\cos x-\sin x=0$, $\left(x\neq 0\right)$ (1)

Ta thấy $\cos x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên (1) $\Leftrightarrow x=\tan x$ (2).

Xét $g\left(x\right)=x-\tan x$ trên $\left(0;\ 2018\pi\right)\backslash\left\{k\dfrac{\pi}{2}\right\},k\in\mathbb{Z}^+$

có $g'\left(x\right)=1-\dfrac{1}{\cos^2 x}=-\tan^2 x\leq 0,\ \forall\left(0;\ 2018\pi\right)\backslash\left\{k\dfrac{\pi}{2}\right\},k\in\mathbb{Z}^+$.

+ Xét $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, ta có $g\left(x\right)$ nghịch biến nên $g\left(x\right)<g\left(0\right)=0$ nên phương trình $x=\tan x$ vô nghiệm.

+ Vì hàm số $\tan x$ có chu kỳ tuần hoàn là π nên ta xét $g\left(x\right)=x-\tan x$, với $x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Do đó $g\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ và $g\left(\pi\right).g\left(\dfrac{23}{16}\pi\right)<0$ nên phương trình $x=\tan x$ có duy nhất một nghiệm x_0.

Do đó, $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{4035}{2}\pi\right)$ có 2017 khoảng rời nhau có độ dài bằng π. Suy ra phương trình $x=\tan x$ có 2017 nghiệm trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{4035}{2}\pi\right)$.

+ Xét $x\in\left(\dfrac{4035\pi}{2};2018\pi\right)$, ta có $g\left(x\right)$ nghịch biến nên $g\left(x\right)>g\left(2018\pi\right)=2018\pi$ nên phương trình $x=\tan x$ vô nghiệm.

Vậy phương trình $F'\left(x\right)=0$ có 2017 nghiệm trên $\left(0;\ 2018\pi\right)$. Do đó đồ thị hàm số $y=F\left(x\right)$ có 2017 điểm cực trị trong khoảng $\left(0;\ 2018\pi\right)$.

Câu 49: Cho hàm số $f\left(x\right)$ xá định trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2\left(x\right)-2\sqrt{2}f\left(x\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=\dfrac{2-\pi}{2}$.

Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\,x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}\,x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin 2x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi-2}{2}.$$

Do đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}\,x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\,x = \frac{2-\pi}{2}+\frac{\pi-2}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}\,x=0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2\mathrm{d}\,x=0$$

Suy ra $f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, hay $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Bởi vậy:

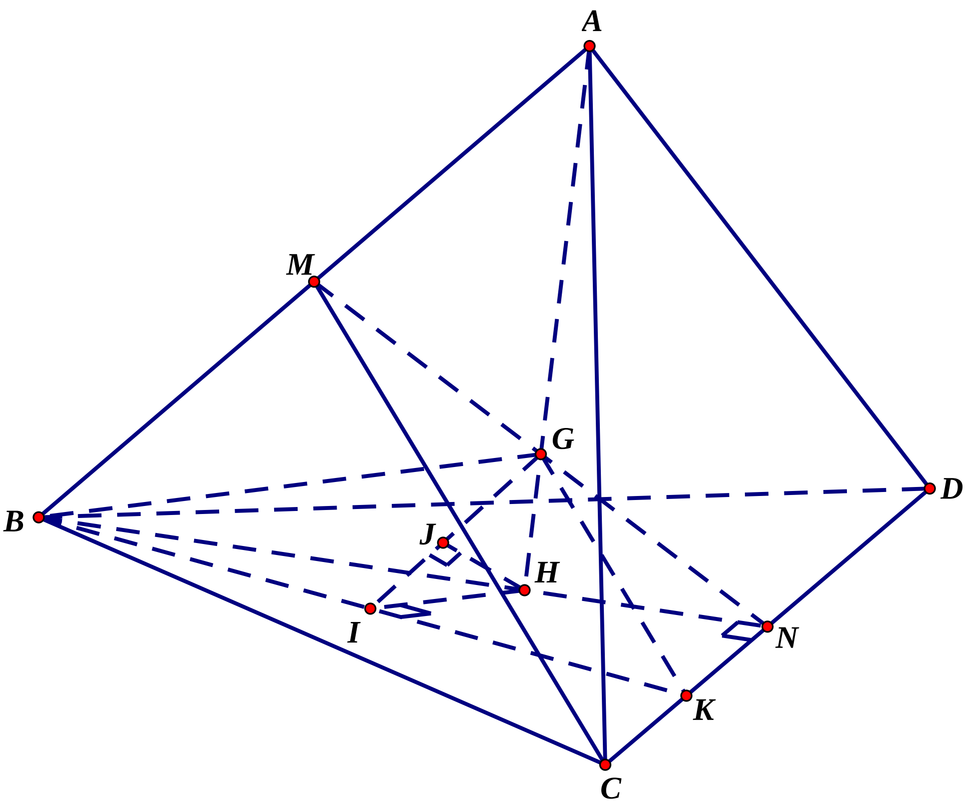
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\,x = -\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Câu 50: Cho tứ diện $ABCD$ đều có cạnh bằng $2\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ và M là trung điểm AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BG và CM bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{14}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{3}{2\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{10}}$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi N là trung điểm CD, khi đó G là trung điểm MN và AG đi qua trọng tâm H của tam giác BCD. Ta có $AH \perp (BCD)$ và $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Ta có: $GH = \frac{1}{4}AH = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Gọi K là trung điểm CN thì $GK // CM$ nên $CM // (BGK)$. Do đó:

$d(BG;CM) = d(C;(BGK)) = d(N;(BGK)) = \frac{3}{2}d(H;(BGK))$.

Kẻ $HI \perp BK$, $HJ \perp GI$ với $I \in BK$, $J \in GI$. Khi đó $HJ \perp (BGK)$ và $HJ = d(H;(BGK))$.

Ta có $BK = \sqrt{BN^2 + NK^2} = \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

Ta có $HI = BH.\sin KBN = BH.\frac{KN}{BK} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{26}}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{13}}$.

Do đó: $HJ = \frac{HI.HG}{\sqrt{HI^2 + HG^2}} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{13}}.\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}$.

Vậy $d(BG;CM) = \frac{3}{2}d(H;(BGK)) = \frac{3}{2}HJ = \frac{3}{2}.\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$.