ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT

MÔN TOÁN NĂM HỌC 2018-2019

Bài I *(2,0 điểm)*.

1) Cho các số a,b,c khác 0 thỏa mãn $ab+bc+ca=0$. Tính giá trị biểu thức:

$$P=\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}$$

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn :

$$x^2+y^2(x-y+1)-(x-1)y=22.$$

Bài II *(3,0 điểm)*.

1) Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+6}+x^2=7-\sqrt{x-1}$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x(x-1)+(y-1)(2y+1)=0 \\ 2y^2+2x+y+1=6xy \end{cases}$

Bài III *(1,0 điểm)*.

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2-ca}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{c^2-ab}{2c^2+a^2+b^2}\geq 0$$

Bài IV *(3,0 điểm)*.

Cho đường tròn (O, R), dây BC cố định và $\widehat{BOC}=120^0$. Điểm A di động trên cung lớn $\widehat{BC}$ sao cho Δ ABC nhọn. Hai đường cao BM và CN cắt nhau tại H. Gọi D là điểm đối xứng với B qua M và E là điểm đối xứng với C qua N. Đường tròn (O_1; R_1) ngoại tiếp Δ ABD và đường tròn (O_2; R_2) ngoại tiếp Δ ACE cắt nhau tại điểm thứ hai K.

1) Chứng minh rằng tứ giác BHCK nội tiếp.

2) Chứng minh rằng MN // O_1O_2 và ba điểm E, B, K thẳng hàng.

3) Tìm vị trí của điểm A sao cho $\frac{1}{KB^2}+\frac{1}{KC^2}$ nhỏ nhất.

Bài V *(1,0 điểm)*.

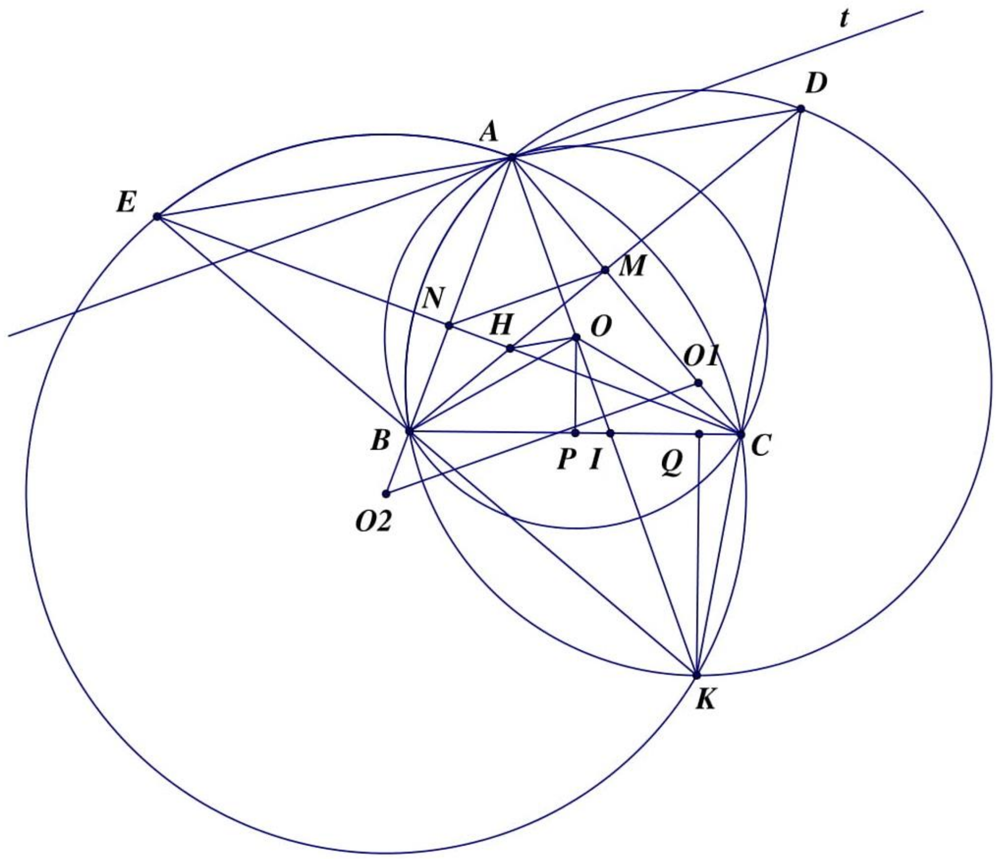
Cho $2\leq a_1<a_2<a_3<...<a_{15}\leq 2016$ là 15 số tự nhiên đôi một nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong 15 số tự nhiên đó luôn tồn tại ít nhất một số nguyên tố.

ĐÁP ÁN ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT

MÔN TOÁN NĂM HỌC 2018-2019

<table>
<tr><th>BÀI</th><th>Ý</th><th>HƯỚNG DẪN CHẤM</th><th>ĐIỂM</th></tr>
<tr><td>I</td><td></td><td></td><td>2,0</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>Tính giá trị biểu thức: $P=\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}$</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Ta có: $ab+bc+ca=0\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$P=abc(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3})=abc(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}-\frac{3}{abc})+3$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$=abc(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{ab}-\frac{1}{bc}-\frac{1}{ca})+3$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$=0+3=3$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn :
$x^2 + y^2(x - y + 1) - (x - 1)y = 22.$</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$x^2 + y^2(x - y + 1) - (x - 1)y = 22$
$\Leftrightarrow x^2 - xy + y + y^2(x - y + 1) = 22$
$\Leftrightarrow (x^2 - xy + x) - (x - y + 1) + y^2(x - y + 1) = 21$
$\Leftrightarrow (x - y + 1)(x + y^2 - 1) = 21$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Vì x, y là các số nguyên dương nên $x - y + 1$ và $x + y^2 - 1$ là các ước dương của 21.
<table>
<tr><td>$x - y + 1$</td><td>1</td><td>21</td><td>3</td><td>7</td></tr>
<tr><td>$x + y^2 - 1$</td><td>21</td><td>1</td><td>7</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$y^2 + y - 2$</td><td>20</td><td>- 20</td><td>4</td><td>- 4</td></tr>
<tr><td>y</td><td>×</td><td>×</td><td>2</td><td>×</td></tr>
<tr><td>x</td><td>×</td><td>×</td><td>4</td><td>×</td></tr>
</table></td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Vậy có một cặp nguyên dương (x, y) thỏa mãn phương trình đầu bài là (4; 2).</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>II</td><td></td><td></td><td>3,0</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+6}+x^2=7-\sqrt{x-1}$.</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>ĐK: $x\ge 1$
Ta có: $\sqrt[3]{x+6}-2+x^2-4+\sqrt{x-1}-1=0$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}+(x-2)(x+2)+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}=0$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \ \text{(TM)} \\ \frac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}+x+2+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=0 \ (1) \end{array}\right.$
Dễ thấy phương trình (1) vô nghiệm do VT luôn dương $\forall x\ge 1$
Vậy phương trình có nghiệm $x=2$</td><td>0,5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>2</td><td>Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x(x-1)+(y-1)(2y+1)=0 \\ 2y^2+2x+y+1=6xy \end{cases}$</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} 2x^2+2y^2=2x+y+1 \quad (1) \\ 2y^2+2x+y+1=6xy \quad (2) \end{cases}$
Thay $2x + y + 1 = 2x^2 + 2y^2$ từ phương trình (1) vào phương trình (2) ta có:
$2x^2+4y^2=6xy \Leftrightarrow x^2-3xy+2y^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=2y \end{array}\right.$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Với $x=y$ suy ra nghiệm: $(1;1),\left(\frac{-1}{4};\frac{-1}{4}\right)$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Với $x=2y$ suy ra nghiệm: $\left(\frac{5\pm\sqrt{65}}{10};\frac{5\pm\sqrt{65}}{20}\right)$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>III</td><td></td><td>Chứng minh rằng: $\frac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2-ca}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{c^2-ab}{2c^2+a^2+b^2}\ge 0$</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Ta có: $\frac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2-ca}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{c^2-ab}{2c^2+a^2+b^2}\ge 0$
$\Leftrightarrow \frac{2a^2-2bc}{2a^2+b^2+c^2}-1+\frac{2b^2-2ca}{2b^2+c^2+a^2}-1+\frac{2c^2-2ab}{2c^2+a^2+b^2}-1\ge -3$
$\Leftrightarrow \frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}\le 3$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz :
$\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}\ge\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}$; $\frac{c^2}{b^2+c^2}+\frac{a^2}{b^2+a^2}\ge\frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2}$;
$\frac{a^2}{c^2+a^2}+\frac{b^2}{c^2+b^2}\ge\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Suy ra:
$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}$
$\le\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{b^2+c^2}+\frac{a^2}{b^2+a^2}+\frac{a^2}{c^2+a^2}+\frac{b^2}{c^2+b^2}=3$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Vậy ta có đpcm. Dấu “=” xảy ra khi a = b = c</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>IV</td><td></td><td></td><td>3,0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>1. Chứng minh rằng tứ giác BHCK nội tiếp.</td><td>1,0</td></tr>
</table>

			
		Ta có $\widehat{BOC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^0$ $\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{ACN} = 30^0$ và $\widehat{BHC} = 120^0$.	0,25
		Xét (O_1) ta có $\widehat{AKB} = \widehat{ADB}$ mà $\widehat{ADB} = \widehat{ABD}$ (Δ ABD cân tại A) $\Rightarrow \widehat{ADB} = 30^0 \Rightarrow \widehat{AKB} = 30^0$.	0,25
		Chứng minh tương tự ta có $\widehat{AKC} = 30^0$. $\Rightarrow \widehat{BKC} = \widehat{AKB} + \widehat{AKC} = 60^0$	0,25
		$\Rightarrow \widehat{BKC} + \widehat{BHC} = 60^0 + 120^0 = 180^0$ $\Rightarrow$ Tứ giác BHCK nội tiếp	0,25
		2. Chứng minh rằng MN // O_1O_2 và ba điểm E, B, K thẳng hàng.	***1,0***
		Vì $O_1O_2 \perp$ AK nên ta sẽ chứng minh MN $\perp$ AK. Kẻ tiếp tuyến At của (O) tại A. Ta có $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$ (Cùng bù với $\widehat{MNC}$) Mà $\widehat{ABC} = \widehat{tAC} \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{tAC} \Rightarrow$ At // MN mà OA $\perp$ At $\Rightarrow$ MN $\perp$ OA. Bây giờ ta sẽ đi chứng minh cho A, O, K thẳng hàng.	0,25
		Theo trên ta có $\widehat{AKB} = \widehat{AKC} = 30^0 \Rightarrow$ AK là phân giác $\widehat{BKC}$ (1) Ta có $\widehat{BOC} + \widehat{AKC} = 120^0 + 60^0 = 180^0$ $\Rightarrow$ Tứ giác BOCK nội tiếp. Vì OB = OC và tứ giác BOCK nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OKB} = \widehat{OKC}$ $\Rightarrow$ KO là phân giác $\widehat{BKC}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra A, O, K thẳng hàng	0,25
		Mà MN $\perp$ OA $\Rightarrow$ MN $\perp$ AK. Ta lại có $O_1O_2 \perp$ AK $\Rightarrow$ MN // O_1O_2	0,25

		Ta có $\widehat{EBC} = 2\widehat{ABC} = \widehat{AOC}$ và $\widehat{CBK} = \widehat{KOC}$ $\Rightarrow \widehat{EBC} + \widehat{CBK} = \widehat{AOC} + \widehat{COK} = \widehat{AOK} = 180^0$ $\Rightarrow$ E, B, K thẳng hàng.	0,25
		3. Tìm vị trí của điểm A sao cho $\frac{1}{KB^2} + \frac{1}{KC^2}$ nhỏ nhất.	***1,0***
		Kẻ KQ $\perp$ BC và gọi I là giao điểm của AK và BC. Ta có $S_{BHCK} = \frac{1}{2}BC\left(OP + KQ\right) \le \frac{1}{2}BC\left(OI + KI\right) = \frac{1}{2}BC.OK$ Vì BHOCK nội tiếp và Δ BHC và Δ ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng nhau nên BHOCK nội tiếp đường tròn bán kính R $\Rightarrow$ OK $\le$ 2R.	0,25
		$\Rightarrow S_{BHCK} \le \frac{1}{2}BC.OK \le \frac{1}{2}R\sqrt{3}.2R = R^2\sqrt{3}$ Mặt khác $S_{BHCK} = \frac{1}{2}R\sqrt{3}.\frac{R}{2} + \frac{1}{2}KB.KC.\sin 60^0 = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}KB.KC \le R^2\sqrt{3}$	0,25
		$\Rightarrow KB.KC \le 3R^2 \Rightarrow \frac{1}{KB^2} + \frac{1}{KC^2} \ge \frac{2}{KB.KC} \ge \frac{2}{3R^2}$	0,25
		$\Rightarrow \min\left(\frac{1}{KB^2} + \frac{1}{KC^2}\right) = \frac{2}{3R^2} \Leftrightarrow$ OK = 2R, P $\equiv$ I, Q $\equiv$ I $\Leftrightarrow$ Δ ABC đều $\Leftrightarrow$ A là điểm chính giữa cung AB.	0,25
V		***Chứng minh rằng trong 15 số tự nhiên đó luôn tồn tại ít nhất một số nguyên tố.***	***1,0***
		Phản chứng giả sử 15 số tự nhiên đó đều là hợp số. Do $2016 < 2209 = 47^2$ nên mỗi số tự nhiên đó đều có một ước nguyên tố nhỏ hơn 47.	0,25
		Gọi p_i là ước nguyên tố của a_i, $p_i < 47$. Do có tất cả 14 số nguyên tố nhỏ hơn 47 nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại $i \ne j$ mà $p_i = p_j$.Suy ra a_i và a_j không nguyên tố cùng nhau, mâu thuẫn với giả thiết. Vậy trong 15 số tự nhiên đó luôn tồn tại ít nhất một số nguyên tố.	0,75