Đề thi thử vào lớp 10
Môn Toán
Năm học 2017 - 2018

Câu I *(2,0 điểm)* Cho biểu thức:

$$A=\frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1};B=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{3x+9}{x-9}\right).\left(\frac{\sqrt{x}-2}{3}+1\right)\text{ (với } x\geq 0, x\neq 9\text{)}$$

1. Tính giá trị của A khi $x=\sqrt{19+8\sqrt{3}}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}$
2. Rút gọn B
3. Gọi $M=A.B$. So sánh M và $\sqrt{M}$

Câu ii (2 điểm): Để chở hết 60 tấn hàng, một đội xe dự định dùng một số xe cùng loại. Lúc sắp khởi hành có 3 xe phải đi làm việc khác. Vì vậy, mỗi xe còn lại phải chở nhiều hơn dự định 1 tấn hàng mới hết số hàng đó. Tính số xe lúc đầu của đội, biết rằng khối lượng mỗi xe phải chở là như nhau.

Câu iii (2 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}|x+2|+4\sqrt{y-1}=3\\ 3|x+2|-2\sqrt{y-1}=2\end{cases}$

2. Cho phương trình $x^2-mx+2m-4=0$ (*)

a) Giải phương trình khi m = 1

b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 *sao cho* $|x_1|+|x_2|=3$

Câu IV (3,5 điểm):. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) ($AB<CD$). Gọi I là điểm chính giữa cung nhỏ AB. Hai dây DI và CI lần lượt cắt AB tại M và N. Các tia DA và CI cắt nhau tại E. Các tia CB và DI cắt nhau tại F.

a) Chứng minh rằng tứ giác $CDEF$ nội tiếp.

b) Chứng minh EF song song với MN.

c) Chứng minh $AI^2=IM.ID$ và IA tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp $\triangle AMD$.

d) Cho AB cố định. CD di động. Gọi R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle AMD$ và R_2 là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle BMD$. Chứng minh R_1 và R_2 có tổng không đổi.

Câu V (0,5 điểm). Cho x, y, z là các số thực dương . Chứng minh:

$$\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}\left(\sqrt{(x+y)}+\sqrt{(y+z)}+\sqrt{(z+x)}\right)\geq 4(xy+yz+xz)$$

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

1. Ta có $x=\sqrt{19+8\sqrt{3}}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{\left(4+\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(4-\sqrt{3}\right)^2}=4+\sqrt{3}+4-\sqrt{3}=8$

Thay vào ta được $A=\dfrac{2-5\sqrt{8}}{\sqrt{8}+1}=\dfrac{\left(2-5\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{8}-1\right)}{7}=\dfrac{7\sqrt{8}-42}{7}=2\sqrt{2}-6$

2. Ta có $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{3x+9}{x-9}\right).\left(\dfrac{\sqrt{x}-2}{3}+1\right)$ (với $x\ge 0, x\ne 9$)

$=\left(\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)+2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)-3x-9}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}\right).\left(\dfrac{\sqrt{x}-2+3}{3}\right)$

$=\dfrac{x-3\sqrt{x}+2x+6\sqrt{x}-3x-9}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}.\dfrac{\sqrt{x}+1}{3}=\dfrac{3\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{3\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$

3. Ta có $M=A.B=\dfrac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

Với $2-5\sqrt{x}\ge 0\Leftrightarrow \sqrt{x}\le\dfrac{2}{5}\Leftrightarrow 0\le x\le\dfrac{4}{5}$ thì $M\ge 0$ và tồn tại $\sqrt{M}$

Ta xét $M^2-M=M\left(M-1\right)$

$=\dfrac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}.\left(\dfrac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}-1\right)=\dfrac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}.\dfrac{-\left(1+6\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}+3}=-\dfrac{\left(2-5\sqrt{x}\right)\left(1+6\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)^2}\le 0$

Vậy $M^2-M\le 0\Leftrightarrow M^2\le M\Leftrightarrow M\le\sqrt{M}$ với mọi $x\in\left[0;\dfrac{4}{5}\right]$

Bài 2

Gọi số xe lúc đầu của đội là x $\left(x\in N^*\right)$.

Ta có bảng:

	Số xe	Khối lượng mỗi xe phải chở (tấn)	Tổng khối lượng hàng phải chở (tấn)
Dự định	x	$\dfrac{60}{x}$	60
Thực tế	$x-3$	$\dfrac{60}{x-3}$	60

Vì mỗi xe còn lại phải chở nhiều hơn dự định 1 tấn hàng mới hết số hàng đó nên ta có phương trình:

$$\frac{60}{x}+1=\frac{60}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{60(x-3)}{x(x-3)}+\frac{x(x-3)}{x(x-3)}=\frac{60x}{x(x-3)}$$

$$\Rightarrow 60x-180+x^2-3x=60x$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x-180=0$$

Ta có: $\Delta=(-3)^2-4.1.(-180)=729>0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{729}}{2}=15$ (thỏa mãn điều kiện)

$x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{729}}{2}=-12$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy: lúc đầu đội có 15 xe.

Câu III.

1) ĐK: $y\geq 1$

Đặt $a=|x+2|$, $b=\sqrt{y-1}$ $(a,b\geq 0)$

Hệ pt $\Leftrightarrow \begin{cases} a+4b=3 \\ 3a-2b=2 \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$ (tm)

$$\Rightarrow \begin{cases} |x+2|=1 \\ \sqrt{y-1}=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-3 \end{array}\right. \\ y=\frac{5}{4} \end{cases} (tm)$$

2a) Thay m = 1 vào phương trình (*) ta có:

$x^2-x-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$

b) $\Delta=b^2-4ac=m^2-4(2m-4)=m^2-8m+16=(m-4)^2$

Để pt có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2 \Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow m\neq 4$

Theo định lý Vi-et:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}=m \\ x_1x_2=\frac{c}{a}=2m-4 \end{cases}$$

$|x_1|+|x_2|=3 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+2|x_1x_2|=9$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 \square 2x_1x_2+2|x_1x_2|=9$

$\Leftrightarrow m^2 \square 2(2m \square 4)+2|2m \square 4|=9$

$Th1: m \geq 2$

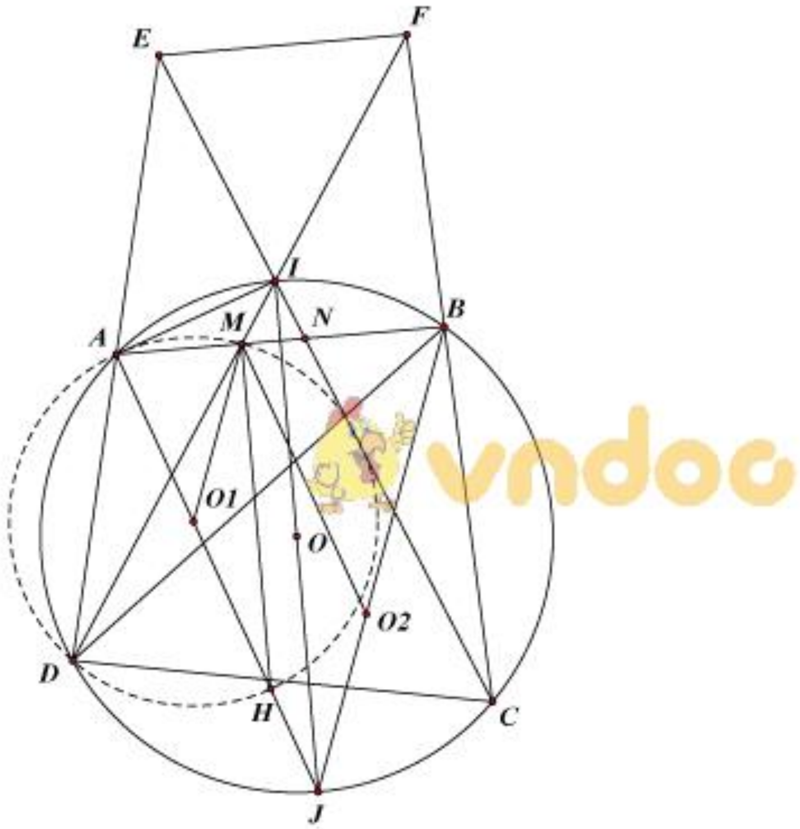
$pt \Leftrightarrow m^2 = 9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3(tm) \\ m = -3(ktm) \end{array}\right.$

$Th2: m < 2$

$Pt \Leftrightarrow m^2 - 2(2m - 4) - 2(2m - 4) = 9 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 7 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1(tm) \\ m = 7(ktm) \end{array}\right.$

Vậy $\left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = 1 \end{array}\right.$

Câu IV:



1. Xét (O) có: ADI là góc nội tiếp chắn AI

BCI là góc nội tiếp chắn BI

Mà $AI = BI$ (vì I là điểm chính giữa cung AB)

$\Rightarrow$ $ADI = BCI$ $\Rightarrow$ Tứ giác CDEF nội tiếp.

2. Xét (O) có: $ADM = IDB$ (2 góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau)

$DAM = DIB$ (2 góc nội tiếp cùng chắn BD)

$\Rightarrow \Delta$ ADM $\backsim$ Δ IDB $\Rightarrow$ $AMD = IBD$

Mà $IBD = ICD$ (2 góc nội tiếp cùng chắn ID)

$\Rightarrow AMD = ICD$

Có: $ICD = EFD$ (vì CDEF là tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow$ $AMD = EFD$, mà 2 góc ở vị trí đồng vị $\Rightarrow AB \parallel EF$

3. Xét (O) có: IAM là góc nội tiếp chắn BI

ADI là góc nội tiếp chắn AI

Mà $AI = BI \Rightarrow IAM = ADI$

Xét Δ AIM và Δ DIA có: $IAM = ADI$; AID chung

$\Rightarrow \Delta$ AIM $\backsim$ Δ DIA $\Rightarrow \dfrac{AI}{IM} = \dfrac{ID}{AI} \Rightarrow AI^2 = IM.ID$

Gọi O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ AMD. Kẻ đường kính AH của (O_1)

Xét (O_1) có: $\widehat{ADM} = AHM$ (2 góc nội tiếp chắn AM)

Xét (O) có: $IAM = ADM$ (cmt)

$\Rightarrow IAM = \widehat{AHM}$ (1)

Ta có: Δ AMH nội tiếp (O_1) đường kính AH $\Rightarrow \Delta$ AMH vuông tại M

$\Rightarrow \widehat{AHM} + \widehat{MAH} = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{IAM} + MAH = 90^0 \Rightarrow IAH = 90^0$

$\Rightarrow$ IA $\perp$ AH $\Rightarrow$ AI là tiếp tuyến của (O_1) $\Rightarrow$ AI tiếp xúc (O_1)

4. Gọi O_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ BMD.

$\Rightarrow \Delta$ O_1AM cân tại O_1; Δ O_2MB cân tại O_2.

Ta có: $\widehat{AO_1M} = 2\widehat{ADM}$; $\widehat{BO_2M} = 2\widehat{BDM}$

Mà $\widehat{ADM} = \widehat{BDM} \Rightarrow \widehat{AO_1M} = \widehat{BO_2M}$

Mà Δ O_1AM và Δ O_2MB cân $\Rightarrow \widehat{O_1AM} = \widehat{O_1MA} = \widehat{O_2BM} = \widehat{O_2MB}$

Gọi $AO_1 \cap BO_2$ tại J $\Rightarrow \Delta$ JAB cân tại J

Ta có: I, O, J thuộc trung trực của AB $\Rightarrow$ I, O, J thẳng hàng.

Có: $\widehat{IAH} = 90^0 \Rightarrow \widehat{IAJ} = 90^0 \Rightarrow$ IJ là đường kính của (O) $\Rightarrow$ J cố định.

Vì $\widehat{AMO_1} + \widehat{O_1MO_2} + \widehat{O_2MB} = 180^0 \Rightarrow \widehat{O_1MO_2} = 180^0 - 2\widehat{AMO_1}$, mà $\widehat{AO_1M} = 180^0 - 2\widehat{AMO_1}$

$\Rightarrow \widehat{O_1MO_2} = \widehat{AO_1M}$, mà 2 góc so le trong $\Rightarrow$ $O_1J \parallel MO_2$

Chứng minh tương tự có: $O_2J \parallel MO_1$

$\Rightarrow$ O_1MO_2J là hình bình hành $\Rightarrow$ $MO_2 = O_1J$.

Có $R_1 + R_2 = O_1A + O_2M = O_1A + O_1J = AJ$.

Vì A, J cố định $\Rightarrow$ AJ không đổi $\Rightarrow$ $R_1 + R_2$ không đổi.

Bài 5

Đặt

$$H = \sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}\left(\sqrt{(x+y)} + \sqrt{(y+z)} + \sqrt{(z+x)}\right)$$

$$H = (x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)} + (y+z)\sqrt{(x+y)(z+x)} + (z+x)\sqrt{(x+y)(y+z)}$$

Áp dụng bất đẳng thức $(a+b)(c+d) \ge \left(ac+bd\right)^2$ với a, b, c, d không âm

Ta được :

$$\sqrt{(y+z)(z+x)} \ge \sqrt{xy} + z$$

$$\sqrt{(x+y)(z+x)} \ge \sqrt{yz} + x$$

$$\sqrt{(x+y)(y+z)} \ge \sqrt{zx} + y$$

Cộng vế các bđt trên ta được :

$$H = (x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)} + (y+z)\sqrt{(x+y)(z+x)} + (z+x)\sqrt{(x+y)(y+z)}$$

$$\Rightarrow H \ge (x+y)(\sqrt{xy}+z) + (y+z)(\sqrt{yz}+x) + (z+x)(\sqrt{zx}+y)$$

$$\Leftrightarrow H \ge (x+y).\sqrt{xy} + (y+z).\sqrt{yz} + (z+x).\sqrt{zx} + 2(xy+yz+zx) \quad (*)$$

Áp dụng bđt $a+b \ge 2\sqrt{ab}$ với a, b không âm, ta có:

$$x+y \ge 2\sqrt{xy}$$

$$y+z \ge 2\sqrt{yz} \quad (**)$$

$$z+x \ge 2\sqrt{zx}$$

Từ (*) và (**) ta có:

$$H \ge (x+y).\sqrt{xy} + (y+z).\sqrt{yz} + (z+x).\sqrt{zx} + 2(xy+yz+zx)$$

$$H \ge 2\sqrt{xy}.\sqrt{xy} + 2\sqrt{yz}.\sqrt{yz} + 2\sqrt{zx}.\sqrt{zx} + 2(xy+yz+zx)$$

$$H \ge 2(xy+yz+zx) + 2(xy+yz+zx)$$

$$H \ge 4(xy+yz+zx) \ (dpcm)$$

$$Dau' =' xay\ ra\ khi\ x = y = z > 0$$