

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT
MÔN TOÁN
NĂM HỌC 2018-2019

Câu I (1,5 điểm)

Đơn giản biểu thức: $A = \frac{1}{3+\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{7}+7\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{101\sqrt{103}+103\sqrt{101}}$.

Câu II (2,5 điểm).

1) Cho x, y, z là các số dương thay đổi và thỏa mãn: $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức.

$$P = \frac{\sqrt{x}}{1+x+xy} + \frac{\sqrt{y}}{1+y+yz} + \frac{\sqrt{z}}{1+z+zx}$$

2) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2x^3 + x = y^3 + 2y \\ x^2 - 2y^2 = -1 \end{cases}$$

Câu III (2,5 điểm).

1) Cho a và b là các số nguyên dương khác nhau thỏa mãn: $ab(a+b)$ chia hết cho $(a^2 + ab + b^2)$. Chứng minh rằng: $|a-b| > \sqrt[3]{3ab}$.

2) **Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn** phương trình:

$$x^2 + y^2 = 3x + xy.$$

Câu IV (2,5 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC và $AB = AC = a$. Dựng đường tròn (O, r) tiếp xúc với đường thẳng AB tại điểm B và tiếp xúc với đường thẳng AC tại điểm C . Gọi M là điểm tùy ý trên cung nhỏ BC của (O) và M khác B, M khác C . Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các đường thẳng AB, AC và BC .

1) Chứng minh tam giác MDF đồng dạng với tam giác MFE .

2) Xác định vị trí của M trên cung nhỏ BC để biểu thức $\frac{1}{MD^2} + \frac{1}{ME^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó theo a và r .

Câu V (1 điểm).

Cho đa thức $P(x) = x^2 + ax + b$, trong đó a và b là hai số nguyên dương cho trước và thỏa mãn $a^2 < 4b$. Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên m, n sao cho:

$$m > 2015, n > 2017 \text{ và } \frac{P(m)}{P(n)} = \frac{P(2015)}{P(2017)}.$$

ĐÁP ÁN ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT MÔN TOÁN

<p>Câu I (1,5đ)</p>	<ul style="list-style-type: none"> c/m $\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n+3} + (2n+3)\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \right)$ Cho $n = 0, 1, 2, \dots, 50$. Cộng vế với vế có $A = \frac{103 - \sqrt{103}}{206}$ 	<p>0,75 đ</p> <p>0,75 đ</p>
<p>Câu II ý 1 = 1,5 đ</p>	<ul style="list-style-type: none"> c/m : $M = \sum \frac{1}{1+x+xy} = 1$ và $N = \sum \frac{x}{1+x+xy} = 1$ Sử dụng $AB \leq \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$ ta có $P = \sum \left(\frac{1}{\sqrt{1+x+xy}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x+xy}} \right) \leq \frac{1}{2}(M + N) = \frac{1+1}{2} = 1$ Max P = 1 khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. (Học sinh có thể dùng BĐT Bu ni côp xiki để đánh giá $P \leq \sqrt{M \cdot N} = 1$) 	<p>1,0 đ</p> <p>0,5 đ</p>
<p>Câu II ý 2 = 1 đ</p>	<p>Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x^3 + x = y^3 + 2y, (1) \\ x^2 - 2y^2 = -1 (2) \end{cases}$</p> <ul style="list-style-type: none"> Thay $1 = -x^2 + 2y^2$ vào PT(1) có : $(x-y) \left((x + \frac{3y}{2})^2 + \frac{11}{4}y^2 \right) = 0$. Suy ra $x = y$ hoặc $x = y = 0$ Thay $y = x$ vào PT(2) có $x = 1, x = -1$. Nghiệm của hệ $x = y = \pm 1$ 	<p>0,5 đ</p> <p>0,5 đ</p>
<p>Câu III: 2,5 đ</p>	<p>1) Gọi USCLN $(a, b) = d$. Suy ra $a = dx, b = dy$. Trong đó d, x, y là các số nguyên dương, x khác y và $(x, y) = 1$.</p> <ul style="list-style-type: none"> Từ gt có $dxy(x+y) = (x^2 + xy + y^2)$. Đặt $x^2 + xy + y^2 = m \in N^*$ Gọi USCLN $(x, m) = t$ với t là số nguyên dương. Nếu t khác 1, gọi p là ước nguyên tố của t. Suy ra $y^2 \vdots p, y \vdots p$. Vậy p là ƯC của x và y, mâu thuẫn với $(x, y) = 1$. Do đó $(x, m) = 1$. Chứng minh tương tự $(y, m) = 1$. Mặt khác $m = x^2 + xy + y^2 = x(x+y) + y^2$ mà $(x, y) = 1$. Suy ra $(x+y, m) = 1$. Vậy từ: $dxy(x+y)$ chia hết cho m ta có $d \vdots m$, suy ra $d \geq m$ 	<p>0,5 đ</p> <p>0,5 đ</p>

	<ul style="list-style-type: none"> Theo BĐT Cau chy ta có $d \geq m > 3\sqrt[3]{(xy)^3} = 3xy$ (do x khác y). Suy ra $d^3 > 3ab$ (1). Lại có: $a-b = d x-y > d$, Suy ra $a-b > \sqrt[3]{3ab}$. <p>2) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn phương trình: $x^2 + y^2 = 3x + xy$.</p> <ul style="list-style-type: none"> Nhân 2 vế với 4 có $(2x-y-3)^2 + 3(y-1)^2 = 12$ Ta có $(2x-y-3)^2$ là số chính phương không vượt quá 12 và chia hết cho 3, do đó $2x-y-3 = -3, 0, 3$. Giải từng trường hợp có: $(x, y) \in \{(3;3), (1;-1), (0;0), (3;0), (4;2), (1;2)\}$ 	<p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>
<p>CauIV:2,5đ</p> <p>Câu V (1đ):</p>	<p>1) * Học sinh tự vẽ hình</p> <ul style="list-style-type: none"> C/m các tứ giác nội tiếp MDBF, MECF (Có tổng 2 góc đối bằng 180^0). $M\hat{D}F = M\hat{B}F = M\hat{C}E = M\hat{F}E, M\hat{F}D = M\hat{B}D = M\hat{C}F = M\hat{E}F$. Tam giác MDF đồng dạng với tam giác MFE (g – g) <p>2) Từ kết quả trên suy ra $MD.ME = MF^2$.</p> <ul style="list-style-type: none"> AO cắt cung nhỏ BC và đoạn BC tại K, H là hai điểm cố định. Khi đó $MF \leq KH$ $\frac{1}{MD^2} + \frac{1}{ME^2} \geq \frac{2}{MD.ME} = \frac{2}{MF^2} \geq \frac{2}{KH^2} = \frac{2(a^2 + r^2)}{r^2(a^2 + 2r^2 - 2r\sqrt{a^2 + r^2})}$ <p>Dấu bằng xảy ra khi M trùng với K (Điểm chính giữa cung nhỏ BC).</p> <ul style="list-style-type: none"> $P(x) = x^2 + ax + b = (x + \frac{a}{2})^2 + \frac{4b - a^2}{4} > 0, \forall x$ C/m : $P(x).P(x+1) = P(P(x)+x)$ với mọi x Chọn $x = 2015, x = 2016$ có: $\frac{P(2015).P(2016)}{P(2017).P(2016)} = \frac{P(P(2015)+2015)}{P(P(2016)+2016)} = \frac{P(2015)}{P(2017)}$ Vậy $m = 2015 + P(2015)$ và $n = 2016 + P(2016)$ thỏa mãn bài toán. 	<p>1,0đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>