

**KỶ THI THỬ VÀO LỚP 10**  
**NĂM HỌC 2018-2019**  
Môn thi: **TOÁN**

**Bài I** (3 điểm)

- 1) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $n$  thì  $n^4 + 2015n^2$  chia hết cho 12.
- 2) Giải hệ phương trình sau : 
$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 12 \\ x^2 - xy + 3y^2 = 11 \end{cases}$$

**Bài II** (2 điểm)

- 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x, y)$  thỏa mãn:  $2y^2 + 2xy + x + 3y - 13 = 0$ .
- 2) Giải phương trình:  $2\sqrt{\frac{x^2}{3} + 4} = 1 + \sqrt{\frac{3x}{2}}$

**Bài III** (1 điểm)

Cho  $x, y$  là các số thực không âm. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{(x^2 - y^2)(1 - x^2y^2)}{(1 + x^2)^2(1 + y^2)^2}$$

**Bài IV** (3 điểm)

Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Kẻ tiếp tuyến chung  $CD$  ( $C, D$  là tiếp điểm,  $C \in (O), D \in (O')$ ). Đường thẳng qua  $A$  song song với  $CD$  cắt  $(O)$  tại  $E, (O')$  tại  $F$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là giao điểm của  $BD$  và  $BC$  với  $EF$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $EC$  với  $FD$ . Chứng minh rằng:

- a) Chứng minh rằng tứ giác  $BCID$  nội tiếp.
- b)  $CD$  là trung trực của đoạn thẳng  $AI$ .
- b)  $IA$  là phân giác góc  $MIN$ .

**Bài V** (1 điểm)

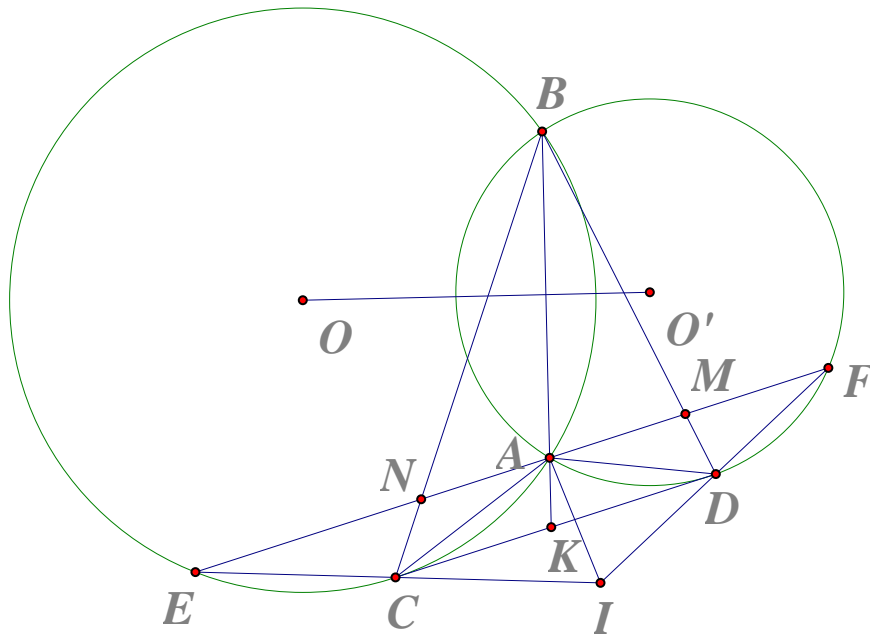
Cho 1010 số tự nhiên phân biệt không vượt quá 2015 trong đó không có số nào gấp 2 lần số khác. Chứng minh rằng trong các số được chọn luôn tìm được 3 số sao cho tổng của 2 số bằng số còn lại.

----- Hết -----  
(Giám thị không giải thích gì thêm)

**HƯỚNG DẪN CHẤM THI THỬ VÀO LỚP 10  
NĂM HỌC 2018-2019**

BÀI	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
<b>I</b>			<b>3,0</b>
	<b>1</b>	<b>Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên <math>n</math> thì <math>n^4 + 2015n^2</math> chia hết cho 12.</b>	<b>1,5</b>
		Ta có: $n^4 + 2015n^2 = n^2(n^2 + 2015)$	0,25
		Nếu $n$ chẵn thì $n^2$ chia hết cho 4. Nếu $n$ lẻ thì $n^2 + 2015$ chia hết cho 4. $\Rightarrow n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 4.	0,5
		Nếu $n$ chia hết cho 3 thì $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 3 Nếu $n$ chia 3 dư 1 hoặc dư 2 thì $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 3. Vậy $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 3.	0,5
		Vì $(4, 3) = 1$ nên $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 12.	0,25
	<b>2</b>	<b>Giải hệ phương trình</b>	<b>1,5</b>
		$\begin{cases} 22x^2 + 33xy + 11y^2 = 121 \\ 12x^2 - 12xy + 36y^2 = 121 \end{cases}$ Suy ra : $10x^2 + 45xy - 25y^2 = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow (2x - y)(x + 5y) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ x = -5y \end{cases}$	0,5
		Với $x = \frac{y}{2}$ ta được $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$ .	0,25
		Với $x = -5y$ ta được $\begin{cases} x = \frac{-5\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x = \frac{5\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$	0,5
<b>II</b>			<b>2,0</b>
	<b>1</b>	<b>Tìm các cặp số nguyên <math>(x, y)</math>.... (1,5 điểm)</b>	<b>1,0</b>
		$2y^2 + 2xy + x + 3y - 13 = 0 \Leftrightarrow (2y + 1)(x + y + 1) = 14.$ $\Rightarrow 2y + 1$ và $x + y + 1$ là các ước của 14. Vì $2y + 1$ là số lẻ nên ta có các trường hợp sau:	0,5
		<b>TH 1:</b> $2y + 1 = 1$ và $x + y + 1 = 14 \Rightarrow (x, y) = (13, 0)$	0,25
		<b>TH 2:</b> $2y + 1 = -1$ và $x + y + 1 = -14 \Rightarrow (x, y) = (-14, -1)$	
		<b>TH 3:</b> $2y + 1 = 7$ và $x + y + 1 = 2 \Rightarrow (x, y) = (-2, 3)$	
		<b>TH 4:</b> $2y + 1 = -7$ và $x + y + 1 = -2 \Rightarrow (x, y) = (1, -4)$	0,25
	<b>2</b>	<b>Giải phương trình <math>2\sqrt[4]{\frac{x^2}{3}} + 4 = 1 + \sqrt{\frac{3x}{2}}</math> (1,5 điểm)</b>	<b>1,0</b>

	<p>Điều kiện: <math>x \geq 0</math></p> <p>Ta có <math>4\sqrt{\frac{x^2}{3}+4} = 1 + \frac{3x}{2} + \sqrt{6x}</math>.</p>	0,25
	<p>Do <math>\sqrt{6x} \leq \frac{x+6}{2}</math>, suy ra <math>4\sqrt{\frac{x^2}{3}+4} \leq 2x+4</math></p> <p><math>\Leftrightarrow 4x^2 + 48 \leq 3x^2 + 12x + 12</math></p> <p><math>\Leftrightarrow (x-6)^2 \leq 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow x=6</math></p>	0,5
	Thử lại $x=6$ vào thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm $x=6$ .	0,25
<b>III</b>	<b>Tìm GTLN ..... (1,0 điểm)</b>	<b>1,0</b>
	<p>Ta có: <math>\frac{(a+b)^2}{4} \geq a.b \forall a, b</math> (1). Dấu '=' xảy ra khi <math>a=b</math>.</p> <p>Đặt: <math>\frac{x^2+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = a</math> và <math>\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = b</math></p>	0,25
	<p>Theo (1) ta có: <math>P = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}</math>. Suy ra:</p> $P \leq \frac{1}{4} \left[ \frac{x^2 - y^2 + 1 - x^2y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} \right]^2$ $\Leftrightarrow P \leq \frac{1}{4} \left[ \frac{(x^2+1)(1-y^2)}{(1+x^2)(1+y^2)} \right]^2 \Leftrightarrow P \leq \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1-y^2}{1+y^2} \right)^2$	0,25
	<p>Ta có: <math>0 \leq \left( \frac{1-y^2}{1+y^2} \right)^2 \leq 1 \forall y</math></p> <p>Do đó: <math>P_{\max} = \frac{1}{4}</math></p>	0,25
	Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ (1-y^2)^2 = (1+y^2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$	0,25
<b>IV</b>		<b>3,0</b>
	<b>1 Chứng minh tứ giác BCID nội tiếp (1 điểm)</b>	<b>1,0</b>



**TH1:** Điểm A và đoạn thẳng CD nằm về cùng một phía với đường OO'.

Ta có

$$ABC = AEC = ICD$$

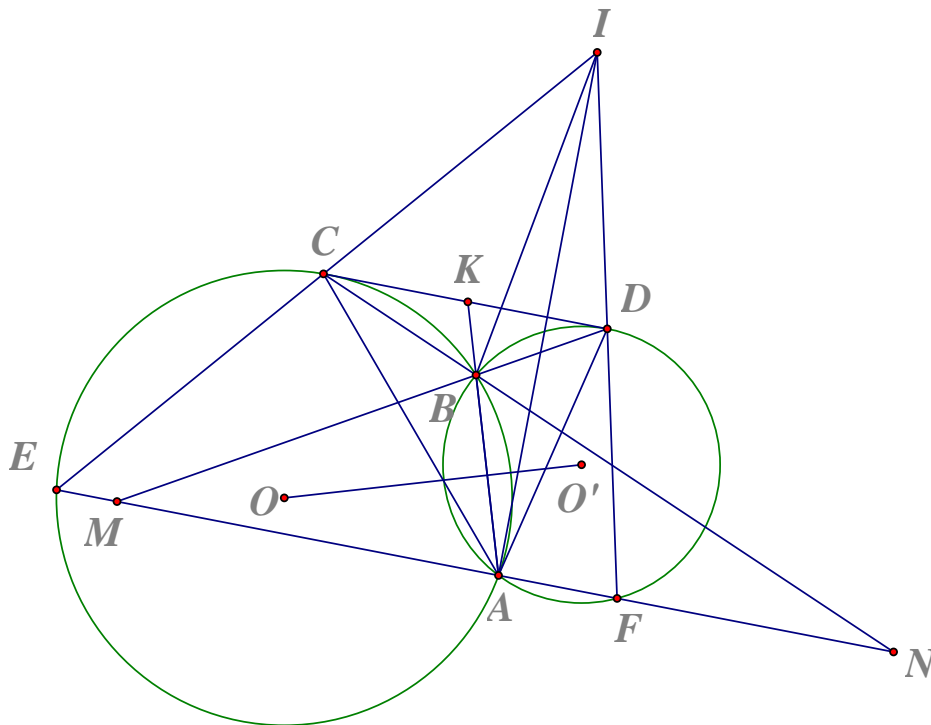
$$DBC = AED = IDC$$

$$\Rightarrow DBA + DIC = ABC + DBC + DIC = ICD + IDC + DIC = 180^\circ$$

$\Rightarrow$  Tứ giác BCID nội tiếp.

0,5

**TH2:** Điểm A và đoạn thẳng CD nằm khác phía nhau so với OO'.



Vì tứ giác ABCE nội tiếp (O) nên  $BCE + BAE = 180^\circ \Rightarrow BCE = BAF$

Tương tự  $BAF = BDI$

$$\Rightarrow BCE = BDI \Rightarrow BCI + BDI = BCI + BCE = 180^\circ$$

$\Rightarrow$  Tứ giác BCID nội tiếp.

0,5

	$\Rightarrow \Delta ICD = \Delta ACD$ $\Rightarrow CA = CI$ và $DA = DI$ $\Rightarrow CD$ là trung trực của $AI$	0,5
	<b>b. Chứng minh <math>CD</math> là trung trực của <math>AI</math> (1,0 điểm)</b> (Hai trường hợp chứng minh như nhau)	<b>1,0</b>
	Ta có $ICD = CEA = DCA \Rightarrow ICD = DCA$ Tương tự $IDC = CDA$	0,5
	$\Rightarrow \Delta ICD = \Delta ACD$ $\Rightarrow CA = CI$ và $DA = DI$ $\Rightarrow CD$ là trung trực của $AI$	0,5
	<b>c. Chứng minh <math>IA</math> là phân giác góc <math>MIN</math> (1 điểm)</b> (Hai trường hợp chứng minh như nhau)	<b>1,0</b>
	Ta có $CD \perp AI \Rightarrow AI \perp MN$ . Gọi $K = AB \cap CD$ . Ta chứng minh được $CK^2 = KA.KB = KD^2$ $\Rightarrow KC = KD$ (1)	0,5
	Vì $CD \parallel MN$ nên $\frac{KC}{AN} = \frac{KD}{AM} = \frac{KB}{AB}$ Từ (1) $\Rightarrow AN = AM$ Mà $AI \perp MN \Rightarrow \Delta IMN$ cân tại $I$ $\Rightarrow IA$ là phân giác góc $MIN$ .	0,5
<b>V</b>	<b>Chứng minh rằng ... (1 điểm)</b>	<b>1,0</b>
	Giả sử $0 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{1010} \leq 2015$ là 1010 số tự nhiên được chọn. Xét 1009 số : $b_j = a_{1010} - a_j, j = 1, 2, \dots, 1009$ suy ra: $0 < b_{1009} < b_{1008} < \dots < b_1 \leq 2015$	0,5
	Theo nguyên lý Dirichlet trong 2019 số $a_i, b_j$ không vượt quá 2015 luôn tồn tại 2 số bằng nhau, mà các số $a_i$ và $b_j$ không thể bằng nhau, suy ra tồn tại $i, j$ sao cho: $b_j = a_i \Rightarrow a_{1010} - a_i = a_i \Rightarrow a_{1010} = a_i + a_i$ (dpcm) (Chú ý $i \neq j$ do trong 1010 số được chọn không có số nào bằng 2 lần số khác )	0,5

**Các chú ý khi chấm:**

- 1) Thí sinh phải lập luận đầy đủ mới cho điểm tối đa.
- 2) Thí sinh có cách giải đúng, khác với hướng dẫn thì giám khảo vẫn chấm và cho điểm theo số điểm quy định dành cho câu (hay ý) đó.
- 3) Vận dụng hướng dẫn chấm chi tiết đến 0,25 điểm nên không làm tròn điểm bài thi.