

Đề thi thử vào lớp 10
Môn Toán
Năm học 2018-2019

Câu I (2,0 điểm) Cho biểu thức:

$$A = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}; B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{3x+9}{x-9} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-2}{3} + 1 \right) \quad (\text{với } x \geq 0, x \neq 9)$$

1. Tính giá trị của A khi $x = \sqrt{19+8\sqrt{3}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}}$
2. Rút gọn B
3. Gọi $M = AB$. So sánh M và \sqrt{M}



Câu ii (2 điểm): Để chở hết 60 tấn hàng, một đội xe dự định dùng một số xe cùng loại. Lúc sắp khởi hành có 3 xe phải đi làm việc khác. Vì vậy, mỗi xe còn lại phải chở nhiều hơn dự định 1 tấn hàng mới hết số hàng đó. Tính số xe lúc đầu của đội, biết rằng khối lượng mỗi xe phải chở là như nhau.

Câu iii (2 điểm). 1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} |x+2| + 4\sqrt{y-1} = 3 \\ 3|x+2| - 2\sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$$

2. Cho phương trình $x^2 - mx + 2m - 4 = 0$ (*)

- a) Giải phương trình khi $m = 1$
- b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $|x_1| + |x_2| = 3$

Câu IV (3,5 điểm). Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) ($AB < CD$). Gọi I là điểm chính giữa cung nhỏ AB . Hai dây DI và CI lần lượt cắt AB tại M và N . Các tia DA và CI cắt nhau tại E . Các tia CB và DI cắt nhau tại F .

- a) Chứng minh rằng tứ giác $CDEF$ nội tiếp.
- b) Chứng minh EF song song với MN .
- c) Chứng minh $AI^2 = IM \cdot ID$ và IA tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp $\square AMD$.
- d) Cho AB cố định. CD di động. Gọi R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\square AMD$ và R_2 là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\square BMD$. Chứng minh R_1 và R_2 có tổng không đổi.

Câu V (0,5 điểm). Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh:

$$\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)} \left(\sqrt{(x+y)} + \sqrt{(y+z)} + \sqrt{(z+x)} \right) \geq 4(xy + yz + xz)$$

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

1. Ta có $x = \sqrt{19+8\sqrt{3}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}} = \sqrt{(4+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(4-\sqrt{3})^2} = 4 + \sqrt{3} + 4 - \sqrt{3} = 8$

Thay vào ta được $A = \frac{2-5\sqrt{8}}{\sqrt{8}+1} = \frac{(2-5\sqrt{8})(\sqrt{8}-1)}{7} = \frac{7\sqrt{8}-42}{7} = 2\sqrt{2}-6$

2. Ta có $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{3x+9}{x-9} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-2}{3} + 1 \right)$ (với $x \geq 0, x \neq 9$)

$= \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 3x-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-2+3}{3} \right)$
 $= \frac{x-3\sqrt{x}+2x+6\sqrt{x}-3x-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{3} = \frac{3(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}{3(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$

3. Ta có $M = AB = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

Với $2-5\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \frac{2}{5} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{4}{5}$ thì $M \geq 0$ và tồn tại \sqrt{M}

Ta xét $M^2 - M = M(M-1)$

$= \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \cdot \left(\frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - 1 \right) = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{-(1+6\sqrt{x})}{\sqrt{x}+3} = -\frac{(2-5\sqrt{x})(1+6\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+3)^2} \leq 0$

Vậy $M^2 - M \leq 0 \Leftrightarrow M^2 \leq M \Leftrightarrow M \leq \sqrt{M}$ với mọi $x \in \left[0; \frac{4}{5} \right]$

Bài 2

Gọi số xe lúc đầu của đội là x ($x \in \mathbb{N}^*$).

Ta có bảng:

	Số xe	Khối lượng mỗi xe phải chở (tấn)	Tổng khối lượng hàng phải chở (tấn)
Dự định	x	$\frac{60}{x}$	60
Thực tế	$x-3$	$\frac{60}{x-3}$	60

Vì mỗi xe còn lại phải chở nhiều hơn dự định 1 tấn hàng mới hết số hàng đó nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{60}{x} + 1 &= \frac{60}{x-3} \\ \Leftrightarrow \frac{60(x-3)}{x(x-3)} + \frac{x(x-3)}{x(x-3)} &= \frac{60x}{x(x-3)} \\ \Rightarrow 60x - 180 + x^2 - 3x &= 60x \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x - 180 &= 0 \end{aligned}$$

Ta có: $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-180) = 729 > 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{729}}{2} = 15$ (thỏa mãn điều kiện)

$x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{729}}{2} = -12$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy: lúc đầu đội có 15 xe.

Câu III.

1) ĐK: $y \geq 1$

Đặt $a = |x+2|$, $b = \sqrt{y-1}$ ($a, b \geq 0$)

$$\text{Hệ pt} \Leftrightarrow \begin{cases} a+4b=3 \\ 3a-2b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases} \quad (m)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x+2|=1 \\ \sqrt{y-1}=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \\ y=\frac{5}{4} \end{cases} \quad (m)$$

2a) Thay $m=1$ vào phương trình (*) ta có:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

b) $\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4(2m-4) = m^2 - 8m + 16 = (m-4)^2$

Để pt có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq 4$

Theo định lý Vi-et:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 2m - 4 \end{cases}$$

$$|x_1| + |x_2| = 3 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| = 9$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| = 9$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2(2m-4) + 2|2m-4| = 9$$

Th1: $m \geq 2$

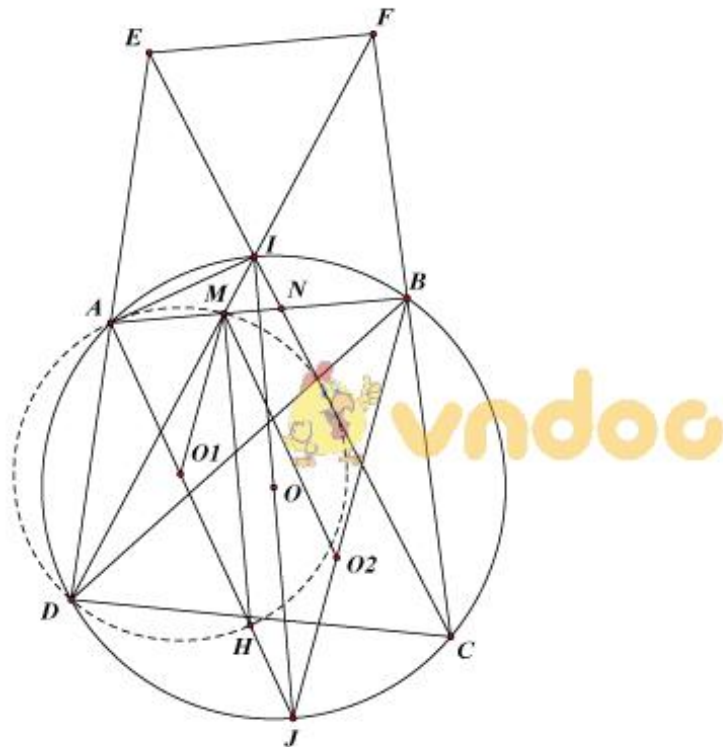
$$pt \Leftrightarrow m^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} m = 3(tm) \\ m = \pm 3(km) \end{cases}$$

Th2: $m < 2$

$$Pt \Leftrightarrow m^2 \pm 2(2m \pm 4) \pm 2(2m \pm 4) = 9 \Leftrightarrow m^2 \pm 8m + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1(tm) \\ m = 7(km) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$$

Câu IV:



1. Xét (O) có: ADI là góc nội tiếp chắn AI
 BCI là góc nội tiếp chắn BI

Mà $AI = BI$ (vì I là điểm chính giữa cung AB)

$\Rightarrow ADI = BCI \Rightarrow$ Tứ giác CDEF nội tiếp.

2. Xét (O) có: $ADM = IDB$ (2 góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau)

$DAM = DIB$ (2 góc nội tiếp cùng chắn BD)

$$\Rightarrow \Delta ADM \cong \Delta IDB \Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{IBD}$$

Mà $\widehat{IBD} = \widehat{ICD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn ID)

$$\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{ICD}$$

Có: $\widehat{ICD} = \widehat{EFD}$ (vì CDEF là tứ giác nội tiếp)

$$\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{EFD}, \text{ mà 2 góc ở vị trí đồng vị } \Rightarrow AB \parallel EF$$

3. Xét (O) có: \widehat{IAM} là góc nội tiếp chắn BI

\widehat{ADI} là góc nội tiếp chắn AI

$$\text{Mà } AI = BI \Rightarrow \widehat{IAM} = \widehat{ADI}$$

Xét ΔAIM và ΔDIA có: $\widehat{IAM} = \widehat{ADI}$; \widehat{AID} chung

$$\Rightarrow \Delta AIM \cong \Delta DIA \Rightarrow \frac{AI}{IM} = \frac{ID}{AI} \Rightarrow AI^2 = IM \cdot ID$$

Gọi O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAMD . Kẻ đường kính AH của (O_1)

Xét (O_1) có: $\widehat{ADM} = \widehat{AHM}$ (2 góc nội tiếp chắn AM)

Xét (O) có: $\widehat{IAM} = \widehat{ADM}$ (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{IAM} = \widehat{AHM} \quad (1)$$

Ta có: ΔAMH nội tiếp (O_1) đường kính $AH \Rightarrow \Delta AMH$ vuông tại M

$$\Rightarrow \widehat{AHM} + \widehat{MAH} = 90^\circ \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \widehat{IAM} + \widehat{MAH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IAH} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow IA \perp AH \Rightarrow AI \text{ là tiếp tuyến của } (O_1) \Rightarrow AI \text{ tiếp xúc } (O_1)$$

4. Gọi O_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBMD .

$$\Rightarrow \Delta O_1AM \text{ cân tại } O_1; \Delta O_2MB \text{ cân tại } O_2.$$

$$\text{Ta có: } \widehat{AO_1M} = 2\widehat{ADM}; \widehat{BO_2M} = 2\widehat{BDM}$$

$$\text{Mà } \widehat{ADM} = \widehat{BDM} \Rightarrow \widehat{AO_1M} = \widehat{BO_2M}$$

$$\text{Mà } \Delta O_1AM \text{ và } \Delta O_2MB \text{ cân } \Rightarrow \widehat{O_1AM} = \widehat{O_1MA} = \widehat{O_2BM} = \widehat{O_2MB}$$

Gọi $AO_1 \cap BO_2$ tại J $\Rightarrow \Delta JAB$ cân tại J

Ta có: I, O, J thuộc trung trực của AB $\Rightarrow I, O, J$ thẳng hàng.

Có: $\widehat{IAH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IAJ} = 90^\circ \Rightarrow IJ$ là đường kính của (O) $\Rightarrow J$ cố định.

$$\text{Vi } \widehat{AMO_1} + \widehat{O_1MO_2} + \widehat{O_2MB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{O_1MO_2} = 180^\circ - 2\widehat{AMO_1}, \text{ mà } \widehat{AO_1M} = 180^\circ - 2\widehat{AMO_1}$$

$$\Rightarrow \widehat{O_1MO_2} = \widehat{AO_1M}, \text{ mà 2 góc so le trong } \Rightarrow O_1J \parallel MO_2$$

Chúng minh tương tự có: $O_2J \parallel MO_1$

$$\Rightarrow O_1MO_2J \text{ là hình bình hành } \Rightarrow MO_2 = O_1J.$$

$$\text{Có } R_1 + R_2 = O_1A + O_2M = O_1A + O_1J = AJ.$$

Vi A, J cố định $\Rightarrow AJ$ không đổi $\Rightarrow R_1 + R_2$ không đổi.

Bài 5

Đặt

$$H = \sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)} \left(\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \right)$$

$$H = (x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)} + (y+z)\sqrt{(x+y)(z+x)} + (z+x)\sqrt{(x+y)(y+z)}$$

Áp dụng bất đẳng thức $(a+b)(c+d) \geq (ac+bd)^2$ với a, b, c, d không âm

Ta được :

$$\sqrt{(y+z)(z+x)} \geq \sqrt{xy} + z$$

$$\sqrt{(x+y)(z+x)} \geq \sqrt{yz} + x$$

$$\sqrt{(x+y)(y+z)} \geq \sqrt{zx} + y$$

Cộng về các bất trên ta được :

$$H = (x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)} + (y+z)\sqrt{(x+y)(z+x)} + (z+x)\sqrt{(x+y)(y+z)}$$

$$\Rightarrow H \geq (x+y)(\sqrt{xy} + z) + (y+z)(\sqrt{yz} + x) + (z+x)(\sqrt{zx} + y)$$

$$\Leftrightarrow H \geq (x+y)\sqrt{xy} + (y+z)\sqrt{yz} + (z+x)\sqrt{zx} + 2(xy + yz + zx) \quad (*)$$

Áp dụng bất $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ với a, b không âm, ta có:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$y + z \geq 2\sqrt{yz}$$

$$z + x \geq 2\sqrt{zx}$$

Từ (*) và (***) ta có:

$$H \geq (x+y)\sqrt{xy} + (y+z)\sqrt{yz} + (z+x)\sqrt{zx} + 2(xy + yz + zx)$$

$$H \geq 2\sqrt{xy}\sqrt{xy} + 2\sqrt{yz}\sqrt{yz} + 2\sqrt{zx}\sqrt{zx} + 2(xy + yz + zx)$$

$$H \geq 2(xy + yz + zx) + 2(xy + yz + zx)$$

$$H \geq 4(xy + yz + zx) \text{ (dpcm)}$$

Dấu '=' xảy ra khi $x = y = z > 0$

