KỲ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2018-2019
MÔN TOÁN

Bài I (3 điểm)

1) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 12.

2) Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 12 \\ x^2 - xy + 3y^2 = 11 \end{cases}$

Bài II (2 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $2y^2 + 2xy + x + 3y - 13 = 0$.

2) Giải phương trình: $2\sqrt[4]{\dfrac{x^2}{3} + 4} = 1 + \sqrt{\dfrac{3x}{2}}$

Bài III (1 điểm)

Cho x, y là các số thực không âm. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{(x^2 - y^2)(1 - x^2y^2)}{(1 + x^2)^2(1 + y^2)^2}$$

Bài IV (3 điểm)

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Kẻ tiếp tuyến chung CD (C, D là tiếp điểm, C $\in$ (O), D $\in$ (O')). Đường thẳng qua A song song với CD cắt (O) tại E, (O') tại F. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của BD và BC với EF. Gọi I là giao điểm của EC với FD. Chứng minh rằng:

a) Chứng minh rằng tứ giác BCID nội tiếp.

b) CD là trung trực của đoạn thẳng AI.

b) IA là phân giác góc MIN.

Bài V (1điểm)

Cho 1010 số tự nhiên phân biệt không vượt quá 2015 trong đó không có số nào gấp 2 lần số khác. Chứng minh rằng trong các số được chọn luôn tìm được 3 số sao cho tổng của 2 số bằng số còn lại.

------------------------ Hết---------------------

(Giám thị không giải thích gì thêm)

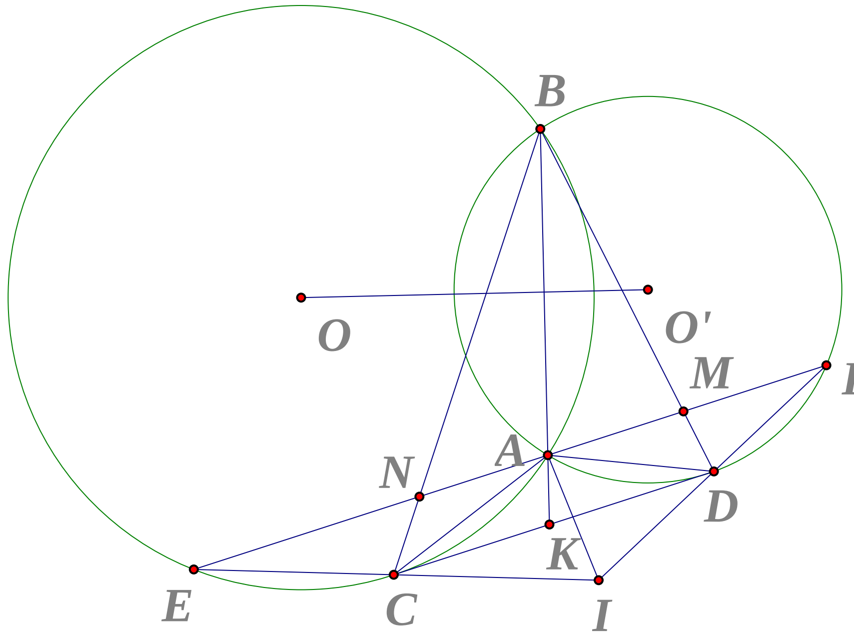
Họ và tên thí sinh: ....Số báo danh:..............................

Chữ ký của giám thị số 1: *Chữ ký của giám thị số 2:*

HƯỚNG DẪN CHẤM THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2018-2019
MÔN TOÁN

BÀI	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
I			***3,0***
	1	***Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 12.***	***1,5***
		Ta có: $n^4 + 2015n^2 = n^2(n^2 + 2015)$	0,25
		Nếu n chẵn thì n^2 chia hết cho 4. Nếu n lẻ thì $n^2 + 2015$ chia hết cho 4. $\Rightarrow n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 4.	0, 5
		Nếu n chia hết cho 3 thì $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 3 Nếu n chia 3 dư 1 hoặc dư 2 thì $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 3. Vậy $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 3.	0, 5
		Vì (4, 3) = 1 nên $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 12.	0,25
	2	***Giải hệ phương trình***	***1,5***
		$\begin{cases} 22x^2 + 33xy + 11y^2 = 121 \\ 12x^2 - 12xy + 36y^2 = 121 \end{cases}$ Suy ra : $10x^2 + 45xy - 25y^2 = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow (2x - y)(x + 5y) = 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{y}{2} \\ x = -5y \end{array}\right.$	0, 5
		Với $x = \dfrac{y}{2}$ ta được $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$.	0,25
		Với $x = -5y$ ta được $\begin{cases} x = \dfrac{-5\sqrt{3}}{3} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}; \begin{cases} x = \dfrac{5\sqrt{3}}{3} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$	0, 5
II			***2,0***
	1	***Tìm các cặp số nguyên (x, y)…. (1,5 điểm)***	***1,0***
		$2y^2 + 2xy + x + 3y - 13 = 0 \Leftrightarrow (2y + 1)(x + y + 1) = 14$. $\Rightarrow 2y + 1$ và $x + y + 1$ là các ước của 14. Vì $2y + 1$ là số lẻ nên ta có các trường hợp sau:	0, 5
		TH 1: $2y + 1 = 1$ và $x + y + 1 = 14 \Rightarrow (x, y) = (13, 0)$ **TH 2:** $2y + 1 = -1$ và $x + y + 1 = -14 \Rightarrow (x, y) = (-14, -1)$	0,25
		TH 3: $2y + 1 = 7$ và $x + y + 1 = 2 \Rightarrow (x, y) = (-2, 3)$ **TH 4:** $2y + 1 = -7$ và $x + y + 1 = -2 \Rightarrow (x, y) = (1, -4)$	0,25
	2	***Giải phương trình*** $2\sqrt[4]{\dfrac{x^2}{3} + 4} = 1 + \sqrt{\dfrac{3x}{2}}$ ***(1,5 điểm)***	***1,0***

		Điều kiện: $x \geq 0$ Ta có $4\sqrt{\frac{x^2}{3}+4} = 1 + \frac{3x}{2} + \sqrt{6x}$.	0,25
		Do $\sqrt{6x} \leq \frac{x+6}{2}$, suy ra $4\sqrt{\frac{x^2}{3}+4} \leq 2x+4$ $\Leftrightarrow 4x^2 + 48 \leq 3x^2 + 12x + 12$ $\Leftrightarrow \left(x-6\right)^2 \leq 0$ $\Leftrightarrow x = 6$	0,5
		Thử lại $x=6$ vào thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm $x=6$.	0,25
III		***Tìm GTLN …… (1,0 điểm)***	***1,0***
		Ta có : $\frac{(a+b)^2}{4} \geq$ a.b $\forall a,b$ (1). Dấu '=' xảy ra khi a=b. Đặt : $\frac{x^2+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = a$ và $\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = b$	0,25
		Theo (1) ta có : $P = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$. Suy ra: $P \leq \frac{1}{4}\left[\frac{x^2-y^2+1-x^2y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\right]^2$ $\Leftrightarrow P \leq \frac{1}{4}\left[\frac{(x^2+1)(1-y^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right]^2$ $\Leftrightarrow P \leq \frac{1}{4}.\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2$	0,25
		Ta có : $0 \leq \left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2 \leq 1 \, \forall y$ Do đó : $P\max = \frac{1}{4}$	0,25
		Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ \left(1-y^2\right)^2 = \left(1+y^2\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$	0,25
IV			***3,0***
	1	***Chứng minh tứ giác BCID nội tiếp (1 điểm)***	***1,0***



TH1: Điểm A và đoạn thẳng CD nằm về cùng một phía với đường OO’.
Ta có

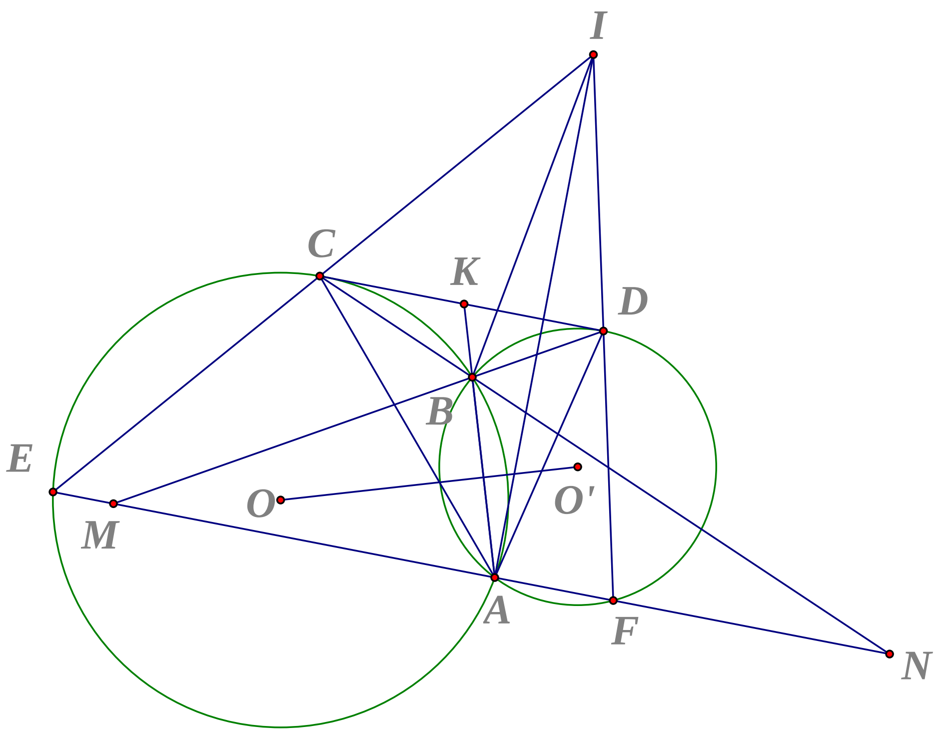
$ABC = AEC = ICD$

$DBC = AED = IDC$

$\Rightarrow DBA + DIC = ABC + DBC + DIC = ICD + IDC + DIC = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác BCID nội tiếp. 0,5

TH2: Điểm A và đoạn thẳng CD nằm khác phía nhau so với OO’.



Vì tứ giác ABCE nội tiếp (O) nên $BCE + BAE = 180^0 \Rightarrow BCE = BAF$

Tương tự $BAF = BDI$

$\Rightarrow BCE = BDI \Rightarrow BCI + BDI = BCI + BCE = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác BCID nội tiếp. 0,5

		$\Rightarrow \Delta$ ICD = Δ ACD $\Rightarrow$ CA = CI và DA = DI $\Rightarrow$ CD là trung trực của AI	0,5
		b. Chứng minh CD là trung trực của AI ***(1,0 điểm)*** ***(Hai trường hợp chứng minh như nhau)***	***1,0***
		Ta có $ICD = CEA = DCA \Rightarrow ICD = DCA$ Tương tự $IDC = CDA$	0,5
		$\Rightarrow \Delta$ ICD = Δ ACD $\Rightarrow$ CA = CI và DA = DI $\Rightarrow$ CD là trung trực của AI	0,5
		c.* Chứng minh IA là phân giác góc MIN** ***(1 điểm) ***(Hai trường hợp chứng minh như nhau)***	***1,0***
		Ta có CD $\perp$ AI $\Rightarrow$ AI $\perp$ MN. Gọi K = AB $\cap$ CD. Ta chứng minh được $CK^2 = KA.KB = KD^2$ $\Rightarrow$ KC = KD (1)	0,5
		Vì CD // MN nên $\frac{KC}{AN} = \frac{KD}{AM} = \frac{KB}{AB}$ Từ (1) $\Rightarrow$ AN = AM Mà AI $\perp$ MN $\Rightarrow \Delta$ IMN cân tại I $\Rightarrow$ IA là phân giác góc MIN.	0,5
V		***Chứng minh rằng …(1điểm)***	***1,0***
		Giả sử $0 \le a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{1010} \le 2015$ là 1010 số tự nhiên được chọn. Xét 1009 số : $b_i = a_{1010} - a_i, i = 1,2,..,1009$ suy ra: $0 < b_{1009} < b_{1008} < ... < b_1 \le 2015$	0,5
		Theo nguyên lý Dirichlet trong 2019 số a_i, b_i không vượt quá 2015 luôn tồn tại 2 số bằng nhau, mà các số a_i và b_i không thể bằng nhau, suy ra tồn tại i,j sao cho: $b_i = a_j \Rightarrow a_{1010} - a_i = a_j \Rightarrow a_{1010} = a_i + a_j (dpcm)$ (Chú ý $i \ne j$ do trong 1010 số được chọn không có số nào bằng 2 lần số khác)	0,5