Đề thi thử vào lớp 10

Môn Toán

Năm học 2018-2019

Câu I (3 điểm).

1) Giải phương trình

$$x^2 + 1 + \sqrt{x^2 + x + 2} = 2x + \sqrt{3x + 1}.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 5 \\ 5x + 10y + 4x^2y + 8y^2x = 27. \end{cases}$$

Câu II (3 điểm).

1) Tìm tích của tất cả các ước số nguyên dương phân biệt của số $n = (420)^4$.

2) Với $a, b, c > 0$ và $\min(ab, bc, ca) \geq 1$. Chứng minh rằng

$$(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) \leq \left(1 + (\frac{a+b}{2})^2\right)\left(1 + (\frac{b+c}{2})^2\right)\left(1 + (\frac{c+a}{2})^2\right).$$

Câu III (3 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với $BA > BC$. Phân giác ngoài góc $\angle ABC$ cắt đường thẳng qua A song song với BC tại P.

1) Chứng minh rằng $AP = AB$.

2) Tiếp tuyến qua A của (O) cắt PB tại Q. BP cắt (O) tại M khác B. Chứng minh rằng

$$MA^2 = MQ \cdot MP.$$

3) Gọi R đối xứng Q qua AC. Chứng minh rằng $\angle APR = \angle CPB$.

Câu IV (1 điểm). Giả sử số nguyên dương n có tính chất: có tồn tại một cách xắp xếp $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ của $2n$ số $1, 1, 2, 2, ..., n, n$ sao cho với mỗi $k = 1, 2, ..., n$ luôn tồn tại đúng k số xếp giữa hai số k. Chứng minh rằng $n^2 + n$ chia hết cho 4.

......Hết ......

Đáp án Đề thi thử vào lớp 10
Môn Toán
Năm học 2018-2019

ĐÁP ÁN ĐỀ VÒNG 1 ĐỢT 1

Câu I. 1) Điều kiện $x \geq -1/3$. Đặt $u = \sqrt{x^2 + x + 2}, v = \sqrt{3x + 1}$ thu được
$u^2 - v^2 + u - v = 0 \leftrightarrow (u - v)(u + v + 1) = 0 \leftrightarrow u = v \leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \leftrightarrow x = 1.$

2) Hệ tương đương

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 5 \\ 5x + 10y + 4x^2y + 8y^2x = 27. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 5(1) \\ (x + 2y)(5 + 4xy) = 27(2) \end{cases}.$$

Thay (1) vào (2) suy ra $(x + 2y)(x^2 + 4y^2 + 4xy) = 27 \leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ xy = 1 \end{cases}$.

Câu II.

1) Ta có $n = (2^2.3.5.7)^4$ nên ước của n có dạng $m = 2^a3^b5^c7^d$ với $0 \leq a \leq 8$ nhận 9 giá trị, $0 \leq b \leq 4, 0 \leq c \leq 4, 0 \leq d \leq 4$ với mỗi số b, c, d nhận 5 giá trị suy ra n có $9.5.5.5 = 1125$ ước dương. Nếu $m \neq 420^2$ thì $\frac{(420)^4}{m}$ cũng là ước suy ra $m, \frac{420^4}{m}$ là một cặp ước có tích bằng 420^4. Ta có $\frac{1125-1}{2} = 562$ cặp ước. Suy ra tích tất cả các ước nguyên dương của n bằng $(420^4)^{562}.420^2 = 420^{2250}$.

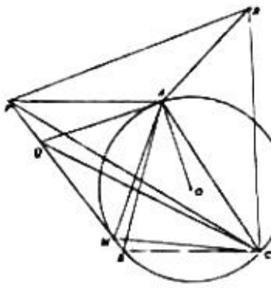
2) Ta có $(1 + a^2)(1 + b^2) = (ab - 1)^2 + (a + b)^2 \leq ((\frac{a+b}{2})^2 - 1)^2 + (a + b)^2 = ((\frac{a+b}{2})^2 + 1)^2$.

Tương tự $(1 + b^2)(1 + c^2) \leq ((\frac{b+c}{2})^2 + 1)^2$ và $(1 + c^2)(1 + a^2) \leq ((\frac{c+a}{2})^2 + 1)^2$. Nhân các vế của bất đẳng thức ta thu được đpcm.

Câu III. 1) Do BP là phân giác ngoài $\angle ABC$ nên $\angle ABP = 90° - \frac{\angle ABC}{2} = 90° - \frac{\angle PAB}{2}$ suy ra tam giác PAB cân tại A nên $AP = AB$.

2) Chú ý AQ là tiếp tuyến của (O), kết hợp câu 1) ta có $\angle APQ = \angle ABP = \angle MAQ$ ta suy ra $\Delta MAQ \sim \Delta MPA$ suy ra $MA^2 = MQ \cdot MP$.

3) Từ R đối xứng Q qua AC nên $\angle PAR = 360° - \angle PAC - \angle CAR = 180° + \angle ACB - \angle CAQ = 180° + \angle ACB - (\angle CAM + \angle MAQ) = \angle ACB + \angle MBC - \angle MBA = \angle ACB + \angle ABC = 180° - \angle BAC = \angle PMC$. Kết hợp $\frac{AP}{AR} = \frac{AP}{AQ} = \frac{MP}{MA} = \frac{MP}{MC}$, ta suy ra $\Delta PAR \sim \Delta PMC$ do đó $\angle APR = \angle CPB$.



Câu IV. Giả sử $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ là một hoán vị thỏa mãn yêu cầu của bài toán, khi đó với mọi $k = 1, 2, ..., n$ luôn tồn tại chỉ số i_k mà $a_{i_k} = a_{i_k + k + 1} = k$. Ta tính tổng các chỉ số bằng 2 cách.

Cách 1:

$$1 + 2 + ... + 2n = n(2n + 1).$$

Cách 2:

$$\sum_{k=1}^{n}(i_k + i_k + k + 1) = 2\sum_{k=1}^{n} i_k + \frac{n(n + 3)}{2}.$$

Suy ra

$$2\sum_{k=1}^{n} i_k = n(2n + 1) - \frac{n(n + 3)}{2} = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

nên $n(3n - 1) \equiv 0 \pmod 4$. Ta có $n^2 + n = 4n^2 - n(3n - 1)$ suy ra $n^2 + n$ chia hết cho 4 **(đpcm)**.