

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT

MÔN TOÁN

NĂM HỌC 2018-2019

Bài 1 (2,0 điểm) Cho biểu thức $P = 2017\left(\frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{4x + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{4(x-1)}{\sqrt{x}-1}\right)$

1.Rút gọn P.

2.Cho $Q = \frac{2018\sqrt{x}}{P}$. Chứng minh rằng $0 < Q < 2$

Bài 2 (2,0 điểm)

1.Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 3(x+y) + 4xy + 5 = 0 \end{cases}$

2.Giải phương trình: $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$

Bài 3 (2,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) có phương trình $y = -x^2$ và đường thẳng (d) đi qua $I(0; -1)$ và có hệ số góc k.

1. Chứng minh rằng với mọi giá trị của k đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

2.Chứng minh OAB là tam giác vuông.

Bài 4 (3,0 điểm)

Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ (R là số dương cho trước), gọi O là trung điểm của AB . Tiếp tuyến với đường tròn tại một điểm P thuộc nửa đường tròn (P không trùng với A, B) cắt hai tiếp tuyến Ax, By của nửa đường tròn theo thứ tự tại các điểm M, N . Gọi K là giao điểm của OM với AP , H là giao điểm của ON và PB .

1.Chứng minh rằng AMPO là tứ giác nội tiếp và OHPK là hình chữ nhật.

2.Chứng minh: $AM \cdot BN = R^2$. Xác định vị trí của P để $AM + BN$ đạt giá trị nhỏ nhất.

3.Xác định vị trí của các điểm M trên Ax và N trên By để chu vi hình thang $AMNB$ bằng $7R$.

Bài 5 (1,0 điểm)

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2}{xy} + 4xy \geq 11. Đẳng thức xảy ra khi nào?$$

ĐÁP ÁN ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT
MÔN TOÁN
NĂM HỌC 2018-2019

Câu	ý	Đáp án
I (2,0 điểm)		<p>Cho biểu thức $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{4x + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{4(x-1)}{\sqrt{x}-1}$</p> <p>Rút gọn P.</p> <p>Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$</p> <p>Ta có $P = \frac{\sqrt{x}[(\sqrt{x})^3 - 1]}{x + \sqrt{x} + 1} - (4\sqrt{x} + 3) + \frac{4(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}$</p> $= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} - (4\sqrt{x} + 3) + 4(\sqrt{x}+1) = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) + 1$ <p>Vậy $P = x - \sqrt{x} + 1$</p>
1		<p>Cho $Q = \frac{2018\sqrt{x}}{P}$. Chứng minh rằng $0 < Q < 2018$</p>
2		<p>Ta có $Q = \frac{2018\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$</p> <p>Vì $P = x - \sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ và $2\sqrt{x} > 0$ nên $Q > 0$</p> <p>Ta có $Q = \frac{2018}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1}$. Do $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$, dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1$ không thỏa mãn điều kiện nên ta có $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 2$. Suy ra $Q < 2018$</p> <p>Vậy $0 < Q < 2018$</p>
II (2,0 điểm)		<p>Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 3(x+y) + 4xy + 5 = 0 \end{cases}$</p> <p>Phương trình tương đương: $\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 5 \\ 3(x+y) + 4xy + 5 = 0 \end{cases}$</p> <p>Đặt $S = x+y, P = xy$. Ta được hệ: $\begin{cases} S^2 - 2P = 5 \\ 3S + 4P = -5 \end{cases}$</p> <p>1</p> $\Leftrightarrow \begin{cases} 2S^2 + 3S - 5 = 0 \\ P = \frac{-5 - 3S}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} S = 1 \\ P = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} S = -\frac{5}{2} \\ P = \frac{5}{8} \end{cases} \end{cases}$

	<p>Với $\begin{cases} S=1 \\ P=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases}$, khi đó x, y là các nghiệm của phương trình:</p> $X^2 - X - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=-1 \\ X=2 \end{cases}. \text{Suy ra } \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ <p>Với $\begin{cases} S=-\frac{5}{2} \\ P=\frac{5}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-\frac{5}{2} \\ xy=\frac{5}{8} \end{cases}$, khi đó x, y là các nghiệm của phương trình:</p> $X^2 + \frac{5}{2}X + \frac{5}{8} = 0 \Leftrightarrow 8X^2 + 20X + 5 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{-5 \pm \sqrt{15}}{4}.$ <p>Suy ra $\begin{cases} x = \frac{-5 + \sqrt{15}}{4} \\ y = \frac{-5 - \sqrt{15}}{4} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = \frac{-5 - \sqrt{15}}{4} \\ y = \frac{-5 + \sqrt{15}}{4} \end{cases}$</p>
	<p>Giải phương trình: $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$</p> <p>Phương trình tương đương với:</p> $(x+1)(x+4)(x+2)(x+3) = 24 \Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 24$ <p>Đặt $x^2 + 5x + 5 = t$, ta được phương trình</p> $(t-1)(t+1) = 24 \Leftrightarrow t^2 - 1 = 24 \Leftrightarrow t^2 = 25 \Leftrightarrow t = \pm 5$ <p>Với $t = 5 \Rightarrow x^2 + 5x + 5 = 5 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-5 \end{cases}$</p> <p>Với $t = -5 \Rightarrow x^2 + 5x + 5 = -5 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 = 0$, phương trình vô nghiệm.</p> <p>Vậy phương trình đã cho có các nghiệm $x=0, x=-5$</p>
2	<p>III $(2,0$ $\text{điểm})$</p> <p>Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) có phương trình $y = -x^2$ và đường thẳng (d) đi qua $I(0; -1)$ và có hệ số góc k.</p> <p>Chứng minh rằng với mọi giá trị của k đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.</p>
1	<p>Đường thẳng (d) có phương trình: $y = kx - 1$</p> <p>Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):</p> $-x^2 = kx - 1 \Leftrightarrow x^2 + kx - 1 = 0 \quad (1)$ <p>Vì phương trình (1) có $a.c < 0$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu. Do đó, (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B.</p> <p>Chứng minh OAB là tam giác vuông.</p> <p>Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của A và B. Khi đó, x_1, x_2 là các nghiệm của (1).</p>

	<p>Theo định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -k \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$</p> <p>Tọa độ các điểm A, B: $A(x_1; kx_1 - 1), B(x_2; kx_2 - 1)$</p> <p>Ta có $OA^2 = x_1^2 + (kx_1 - 1)^2; OB^2 = x_2^2 + (kx_2 - 1)^2$ nên</p> $\begin{aligned} OA^2 + OB^2 &= x_1^2 + (kx_1 - 1)^2 + x_2^2 + (kx_2 - 1)^2 = (k^2 + 1)(x_1^2 + x_2^2) - 2k(x_1 + x_2) + 2 \\ &= (k^2 + 1)[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2] - 2k(x_1 + x_2) + 2 = (k^2 + 1)[k^2 + 2] + 2k^2 + 2 \\ &= (k^2 + 1)(k^2 + 4) \end{aligned}$ <p>Ta có $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + [(kx_2 - 1) - (kx_1 - 1)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + k^2(x_2 - x_1)^2$</p> $= (k^2 + 1)(x_2 - x_1)^2 = (k^2 + 1)[(x_2 + x_1)^2 - 4x_2 \cdot x_1] = (k^2 + 1)(k^2 + 4)$ <p>Vì $AB^2 = OA^2 + OB^2$ nên tam giác OAB vuông tại O.</p>
	<p>Chú ý: học sinh có thể làm theo cách sau:</p> <p>Đường thẳng OA qua gốc O nên phương trình có dạng: $y = mx$.</p> <p>Vì điểm $A(x_1; -x_1^2)$ thuộc đường thẳng này nên ta có $-x_1^2 = m \cdot x_1 \Rightarrow m = -x_1$ (vì $x_1 \cdot x_2 = -1$ nên $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$)</p> <p>Ta có phương trình đường thẳng OA: $y = -x_1 x$</p> <p>Tương tự, ta có phương trình đường thẳng OB: $y = -x_2 x$</p> <p>Tích hệ số góc của hai đường thẳng OA và OB là $(-x_1) \cdot (-x_2) = x_1 \cdot x_2 = -1$. Do vậy hai đường thẳng OA, OB vuông góc với nhau hay tam giác OAB vuông tại O.</p>
IV (3,0 diagram)	<p>Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ (R là số dương cho trước), gọi O là trung điểm của AB. Tiếp tuyến với đường tròn tại một điểm P thuộc nửa đường tròn (P không trùng với A, B) cắt hai tiếp tuyến Ax, By của nửa đường tròn theo thứ tự tại các điểm M, N. Gọi K là giao điểm của OM với AP, H là giao điểm của ON và PB.</p> <p>Chứng minh rằng $AMPO$ là tứ giác nội tiếp và $OHPK$ là hình chữ nhật.</p>
1	
	<p>Vì MA, MP là các tiếp tuyến với nửa đường tròn nên $MA \perp AO, MP \perp PO$, suy ra tứ giác $AMPO$ nội tiếp đường tròn đường kính MO.</p> <p>Vì $MA = MP$ (tính chất 2 tiếp tuyến đi qua M) và $OP = OA = R$ nên suy ra MO là đường trung trực của $AP \Rightarrow AP \perp MO \Rightarrow OKP = 90^\circ$.</p> <p>Tương tự $OHP = 90^\circ$.</p> <p>Ta có $APB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).</p> <p>Tứ giác $OHPK$ có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật.</p>
2	<p>Chứng minh: $AM \cdot BN = R^2$. Xác định vị trí của P để $AM + BN$ đạt giá trị nhỏ nhất.</p> <p>Vì $OHPK$ là hình chữ nhật nên $KOH = 90^\circ$. Ta có tam giác MON vuông tại O, OP là đường cao nên $PM \cdot PN = OP^2 = R^2$</p> <p>Nhưng $MP = MA, NP = NB$ nên ta suy ra $AM \cdot BN = R^2$</p>

	<p>Theo BĐT CÔSI ta có $MA + NB \geq 2\sqrt{MA \cdot NB} = 2\sqrt{R^2} = 2R$ (không đổi). Dấu “=” xảy ra khi $MA = NB$ nên tổng $MA + NB$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2R$ khi $MA = NB$.</p> <p>Khi đó tứ giác $AMNB$ là hình chữ nhật. Mặt khác $OP \perp MN$ nên $OP \perp AB$ khi đó P là điểm chính giữa của nửa đường tròn.</p>
	<p>Xác định vị trí của các điểm M trên Ax và N trên By để chu vi hình thang $AMNB$ bằng $7R$.</p> <p>Ta có chu vi p của hình thang $AMNB$ bằng:</p> $p = AM + MN + NB + BA = AM + MP + PN + NB + AB \Rightarrow p = 2(AM + NB) + 2R$ <p>Theo chứng minh trên ta có $AM \cdot BN = R^2$ và theo giả thiết $p = 7R$ nên ta có hệ phương trình:</p> $\begin{cases} 2(AM + NB) + 2R = 7R \\ AM \cdot NB = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AM + NB = \frac{5R}{2} \\ AM \cdot NB = R^2 \end{cases}$
3	<p>Suy ra AM, BN là các nghiệm của phương trình $X^2 - \frac{5R}{2}X + R^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2R \\ X = \frac{1}{2}R \end{cases}$</p> <p>Do vậy các điểm M, N thỏa mãn yêu cầu của bài toán được xác định bởi $\begin{cases} AM = 2R \\ BN = \frac{R}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} BN = 2R \\ AM = \frac{R}{2} \end{cases}$</p>
V (1,0 điểm)	<p>Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$. Chứng minh rằng:</p> $A = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2}{xy} + 4xy \geq 11$ <p>Đẳng thức xảy ra khi nào?</p> <p>Trước hết ta có bất đẳng thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (*) với $\forall a, b > 0$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.</p> <p>Thật vậy, BĐT (*) $\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ (đúng).</p> <p>Dấu “=” của BĐT (*) xảy ra khi $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$</p> <p>Vì $x+y \geq 2\sqrt{xy}$, $x+y=1$ nên ta có $1 \geq 4xy \Rightarrow \frac{1}{xy} \geq 4$ (**).</p> <p>Dấu “=” xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}$</p> <p>Ta có $A = \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy} \right) + \left(4xy + \frac{1}{4xy} \right) + \frac{5}{4xy}$</p> <p>Áp dụng BĐT CÔSI, BĐT (*) và (**) ta được:</p> $A \geq \left(\frac{4}{x^2 + y^2 + 2xy} \right) + 2\sqrt{4xy \cdot \frac{1}{4xy}} + \frac{5}{4} \cdot 4 = \frac{4}{(x+y)^2} + 7 = 4 + 7 = 11$

		<p>Dấu “=” xảy ra khi</p> $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ 4xy = \frac{1}{4xy} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2} \\ xy = \frac{1}{4} \\ x + y = 1 \end{cases}$
--	--	---

Hết