KỲ THI THỬ VÀO LỚP 10 CHUYÊN THPT
NĂM HỌC 2018-2019
MÔN TOÁN

Bài I (3 điểm)

1) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 12.

2) Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 12 \\ x^2 - xy + 3y^2 = 11 \end{cases}$

Bài II (2 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $2y^2 + 2xy + x + 3y - 13 = 0$.

2) Giải phương trình: $2\sqrt[4]{\dfrac{x^2}{3} + 4} = 1 + \sqrt{\dfrac{3x}{2}}$

Bài III (1 điểm)

Cho x, y là các số thực không âm. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{(x^2 - y^2)(1 - x^2y^2)}{(1 + x^2)^2(1 + y^2)^2}$$

Bài IV (3 điểm)

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Kẻ tiếp tuyến chung CD (C, D là tiếp điểm, $C \in (O)$, $D \in (O')$). Đường thẳng qua A song song với CD cắt (O) tại E, (O') tại F. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của BD và BC với EF. Gọi I là giao điểm của EC với FD. Chứng minh rằng:

a) Chứng minh rằng tứ giác BCID nội tiếp.

b) CD là trung trực của đoạn thẳng AI.

b) IA là phân giác góc MIN.

Bài V (1điểm)

Cho 1010 số tự nhiên phân biệt không vượt quá 2015 trong đó không có số nào gấp 2 lần số khác. Chứng minh rằng trong các số được chọn luôn tìm được 3 số sao cho tổng của 2 số bằng số còn lại.

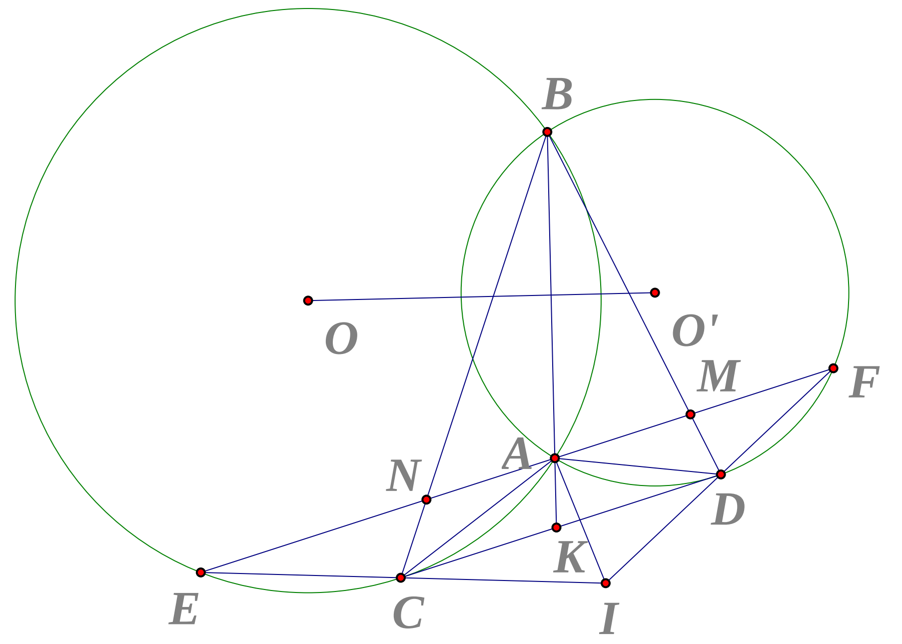
------------------------- Hết----------------------

(Giám thị không giải thích gì thêm)

HƯỚNG DẪN CHẤM THI THỬ VÀO LỚP 10
NĂM HỌC 2018-2019
Môn thi: **TOÁN**

BÀI	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
I			***3,0***
	1	***Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 12.***	***1,5***
		Ta có: $n^4 + 2015n^2 = n^2(n^2 + 2015)$	0,25
		Nếu n chẵn thì n^2 chia hết cho 4. Nếu n lẻ thì $n^2 + 2015$ chia hết cho 4. $\Rightarrow n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 4.	0, 5
		Nếu n chia hết cho 3 thì $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 3 Nếu n chia 3 dư 1 hoặc dư 2 thì $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 3. Vậy $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 3.	0, 5
		Vì (4, 3) = 1 nên $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 12.	0,25
	2	***Giải hệ phương trình***	***1,5***
		$\begin{cases} 22x^2 + 33xy + 11y^2 = 121 \\ 12x^2 - 12xy + 36y^2 = 121 \end{cases}$ Suy ra : $10x^2 + 45xy - 25y^2 = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow (2x - y)(x + 5y) = 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{y}{2} \\ x = -5y \end{array} \right.$	0, 5
		Với $x = \dfrac{y}{2}$ ta được $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$.	0,25
		Với $x = -5y$ ta được $\begin{cases} x = \dfrac{-5\sqrt{3}}{3} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \dfrac{5\sqrt{3}}{3} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$	0, 5
II			***2,0***
	1	***Tìm các cặp số nguyên (x, y)…. (1,5 điểm)***	***1,0***
		$2y^2 + 2xy + x + 3y – 13 = 0 \Leftrightarrow (2y + 1)(x + y + 1) = 14$. $\Rightarrow$ 2y + 1 và x + y + 1 là các ước của 14. Vì 2y + 1 là số lẻ nên ta có các trường hợp sau:	0, 5
		TH 1: 2y + 1 = 1 và x + y + 1 = 14 $\Rightarrow$ (x, y) = (13, 0) **TH 2:** 2y + 1 = -1 và x + y + 1 = - 14 $\Rightarrow$ (x, y) = (-14, -1)	0,25
		TH 3: 2y + 1 = 7 và x + y + 1 = 2 $\Rightarrow$ (x, y) = (-2, 3) **TH 4:** 2y + 1 = - 7 và x + y + 1 = - 2 $\Rightarrow$ (x, y) = (1, - 4)	0,25

<table>
<tr><td></td><td>2</td><td>Giải phương trình $2\sqrt[4]{\frac{x^2}{3}+4}=1+\sqrt{\frac{3x}{2}}$ (1,5 điểm)</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Điều kiện: $x\ge 0$
Ta có $4\sqrt{\frac{x^2}{3}+4}=1+\frac{3x}{2}+\sqrt{6x}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Do $\sqrt{6x}\le\frac{x+6}{2}$, suy ra $4\sqrt{\frac{x^2}{3}+4}\le 2x+4$
$\Leftrightarrow 4x^2+48\le 3x^2+12x+12$
$\Leftrightarrow (x-6)^2\le 0$
$\Leftrightarrow x=6$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Thử lại $x=6$ vào thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm $x=6$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>III</td><td></td><td>Tìm GTLN …… (1,0 điểm)</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Ta có : $\frac{(a+b)^2}{4}\ge$ a.b $\forall a,b$ (1). Dấu ‘=’ xảy ra khi a=b.
Đặt : $\frac{x^2+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}=a$ và $\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}=b$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Theo (1) ta có : $P=ab\le\frac{(a+b)^2}{4}$. Suy ra:
$P\le\frac{1}{4}\left[\frac{x^2-y^2+1-x^2y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\right]^2$
$\Leftrightarrow P\le\frac{1}{4}\left[\frac{(x^2+1)(1-y^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right]^2$ $\Leftrightarrow P\le\frac{1}{4}.\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Ta có : $0\le\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2\le 1\,\forall y$
Do đó : $P\max=\frac{1}{4}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\(1-y^2)^2=(1+y^2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>IV</td><td></td><td></td><td>3,0</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>Chứng minh tứ giác BCID nội tiếp (1 điểm)</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>



TH1: Điểm A và đoạn thẳng CD nằm về cùng một phía với đường OO’.
Ta có

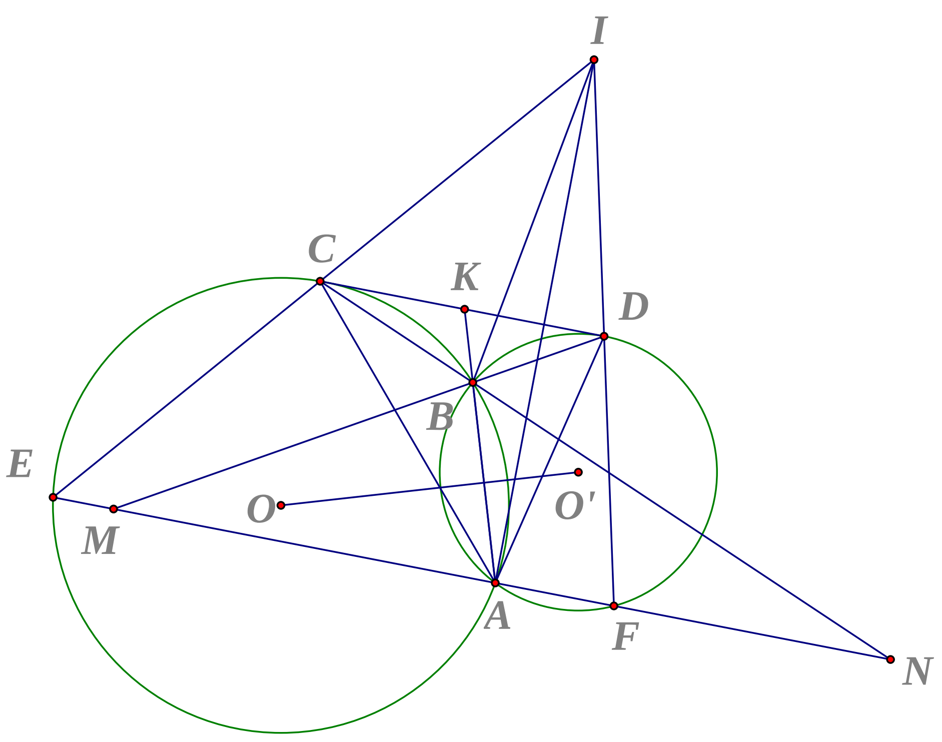
$ABC = AEC = ICD$

$DBC = AED = IDC$

$\Rightarrow DBA + DIC = ABC + DBC + DIC = ICD + IDC + DIC = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác BCID nội tiếp. 0,5

TH2: Điểm A và đoạn thẳng CD nằm khác phía nhau so với OO’.



Vì tứ giác ABCE nội tiếp (O) nên $BCE + BAE = 180^0 \Rightarrow BCE = BAF$

Tương tự $BAF = BDI$

$\Rightarrow BCE = BDI \Rightarrow BCI + BDI = BCI + BCE = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác BCID nội tiếp. 0,5

		$\Rightarrow \Delta$ ICD = Δ ACD $\Rightarrow$ CA = CI và DA = DI $\Rightarrow$ CD là trung trực của AI	0,5
		b. Chứng minh CD là trung trực của AI ***(1,0 điểm)*** ***(Hai trường hợp chứng minh như nhau)***	***1,0***
		Ta có $ICD = CEA = DCA \Rightarrow ICD = DCA$ Tương tự $IDC = CDA$	0,5
		$\Rightarrow \Delta$ ICD = Δ ACD $\Rightarrow$ CA = CI và DA = DI $\Rightarrow$ CD là trung trực của AI	0,5
		c. **Chứng minh IA là phân giác góc MIN** ***(1 điểm)*** ***(Hai trường hợp chứng minh như nhau)***	***1,0***
		Ta có CD $\perp$ AI $\Rightarrow$ AI $\perp$ MN. Gọi K = AB $\cap$ CD. Ta chứng minh được $CK^2 = KA.KB = KD^2$ $\Rightarrow$ KC = KD (1)	0,5
		Vì CD // MN nên $\frac{KC}{AN} = \frac{KD}{AM} = \frac{KB}{AB}$ Từ (1) $\Rightarrow$ AN = AM Mà AI $\perp$ MN $\Rightarrow \Delta$ IMN cân tại I $\Rightarrow$ IA là phân giác góc MIN.	0,5
V		***Chứng minh rằng …(1điểm)***	***1,0***
		Giả sử $0 \le a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{1010} \le 2015$ là 1010 số tự nhiên được chọn. Xét 1009 số : $b_i = a_{1010} - a_i, i = 1,2,..,1009$ suy ra: $0 < b_{1009} < b_{1008} < ... < b_1 \le 2015$	0,5
		Theo nguyên lý Dirichlet trong 2019 số a_i, b_i không vượt quá 2015 luôn tồn tại 2 số bằng nhau, mà các số a_i và b_i không thể bằng nhau, suy ra tồn tại i,j sao cho: $b_i = a_j \Rightarrow a_{1010} - a_i = a_j \Rightarrow a_{1010} = a_i + a_j (dpcm)$ (Chú ý $i \ne j$ do trong 1010 số được chọn không có số nào bằng 2 lần số khác)	0,5

<u>Các chú ý khi chấm:</u>

1) Thí sinh phải lập luận đầy đủ mới cho điểm tối đa.

2) Thí sinh có cách giải đúng, khác với hướng dẫn thì giám khảo vẫn chấm và cho điểm theo số điểm quy định dành cho câu (hay ý) đó.

3) Vận dụng hướng dẫn chấm chi tiết đến 0,25 điểm nên không làm tròn điểm bài thi.