

# ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT

## MÔN TOÁN

NĂM HỌC 2018-2019

### Câu I (1,5 điểm)

Đơn giản biểu thức:  $A = \frac{1}{3+\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{7}+7\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{101\sqrt{103}+103\sqrt{101}}$ .

### Câu II (2,5 điểm).

1) Cho  $x, y, z$  là các số dương thay đổi và thỏa mãn:  $xyz = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức.

$$P = \frac{\sqrt{x}}{1+x+xy} + \frac{\sqrt{y}}{1+y+yz} + \frac{\sqrt{z}}{1+z+zx}$$

2) Giải hệ phương trình : 
$$\begin{cases} 2x^3 + x = y^3 + 2y \\ x^2 - 2y^2 = -1 \end{cases}$$

### Câu III ( 2,5 điểm).

1) Cho  $a$  và  $b$  là các số nguyên dương khác nhau thỏa mãn:  $ab(a+b)$  chia hết cho  $(a^2 + ab + b^2)$ . Chứng minh rằng:  $|a-b| > \sqrt[3]{3ab}$ .

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn phương trình:

$$x^2 + y^2 = 3x + xy.$$

### Câu IV (2,5 điểm).

Cho tam giác nhọn  $ABC$  và  $AB = AC = a$ . Dựng đường tròn  $(O, r)$  tiếp xúc với đường thẳng  $AB$  tại điểm  $B$  và tiếp xúc với đường thẳng  $AC$  tại điểm  $C$ . Gọi  $M$  là điểm tùy ý trên cung nhỏ  $BC$  của  $(O)$  và  $M$  khác  $B, M$  khác  $C$ . Gọi  $D, E, F$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $M$  lên các đường thẳng  $AB, AC$  và  $BC$ .

1) Chứng minh tam giác  $MDF$  đồng dạng với tam giác  $MFE$ .

2) Xác định vị trí của  $M$  trên cung nhỏ  $BC$  để biểu thức  $\frac{1}{MD^2} + \frac{1}{ME^2}$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó theo  $a$  và  $r$ .

### Câu V (1 điểm).

Cho đa thức  $P(x) = x^2 + ax + b$ , trong đó  $a$  và  $b$  là hai số nguyên dương cho trước và thỏa mãn  $a^2 < 4b$ . Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên  $m, n$  sao cho:

$$m > 2015, n > 2017 \text{ và } \frac{P(m)}{P(n)} = \frac{P(2015)}{P(2017)}.$$

**ĐÁP ÁN ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT**  
**MÔN TOÁN**  
**NĂM HỌC 2018-2019**

<p>Câu I(1,5đ)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>c/m <math>\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n+3} + (2n+3)\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \right)</math></li> <li>Cho <math>n = 0, 1, 2, \dots, 50</math>. Cộng về với về có</li> </ul> $A = \frac{103 - \sqrt{103}}{206}$	<p>0,75 đ</p> <p>0,75đ</p>
<p>Câu II ý1=1,5đ</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>c/m : <math>M = \sum \frac{1}{1+x+xy} = 1</math> và <math>N = \sum \frac{x}{1+x+xy} = 1</math></li> <li>Sử dụng <math>AB \leq \frac{1}{2}(A^2 + B^2)</math> ta có</li> </ul> $P = \sum \left( \frac{1}{\sqrt{1+x+xy}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x+xy}} \right) \leq \frac{1}{2}(M + N) = \frac{1+1}{2} = 1$ <ul style="list-style-type: none"> <li>MaxP = 1 khi và chỉ khi <math>x = y = z = 1</math>.</li> </ul> <p>( Học sinh có thể dùng BĐT Bu ni côp xiki để đánh giá</p> $P \leq \sqrt{M \cdot N} = 1$	<p>1,0 đ</p> <p>0,5đ</p>
<p>Câu II ý2=1đ</p>	<p>Giải hệ phương trình : <math>\begin{cases} 2x^3 + x = y^3 + 2y; (1) \\ x^2 - 2y^2 = -1(2) \end{cases}</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Thay <math>1 = -x^2 + 2y^2</math> vào PT(1) có : <math>(x - y) \left( (x + \frac{3y}{2})^2 + \frac{11}{4}y^2 \right) = 0</math>.</li> </ul> <p>Suy ra <math>x = y</math> hoặc <math>x = y = 0</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Thay <math>y = x</math> vào PT(2) có <math>x = 1, x = -1</math>.</li> <li>Nghiệm của hệ <math>x = y = \pm 1</math></li> </ul>	<p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>
<p>Câu III:2,5đ</p>	<p>1) Gọi USCLN <math>(a, b) = d</math>. Suy ra <math>a = dx, b = dy</math>. Trong đó <math>d, x, y</math> là các số nguyên dương, <math>x</math> khác <math>y</math> và <math>(x, y) = 1</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Từ gt có <math>dxy(x+y) : (x^2 + xy + y^2)</math>. <b>Đặt</b> <math>x^2 + xy + y^2 = m \in \mathbb{N}^*</math></li> </ul> <p>Gọi USCLN <math>(x, m) = t</math> với <math>t</math> là số nguyên dương.</p> <p>Nếu <math>t</math> khác 1, gọi <math>p</math> là ước nguyên tố của <math>t</math>. Suy ra <math>y^2 : p, y : p</math>. Vậy <math>p</math> là ƯC của <math>x</math> và <math>y</math>, mâu thuẫn với <math>(x, y) = 1</math>.</p> <p>Do đó <math>(x, m) = 1</math>. Chứng minh tương tự <math>(y, m) = 1</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Mặt khác <math>m = x^2 + xy + y^2 = x(x+y) + y^2</math> mà <math>(x, y) = 1</math>. Suy ra <math>(x+y, m) = 1</math>. Vậy từ: <math>dxy(x+y)</math> chia hết cho <math>m</math> ta có <math>d : m</math>, suy ra <math>d \geq m</math></li> </ul>	<p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>Theo BĐT Cau chy ta có <math>d \geq m &gt; 3\sqrt[3]{(xy)^3} = 3xy</math> ( do x khác y). Suy ra <math>d^3 &gt; 3ab</math> (1). Lại có: <math> a-b  = d x-y  &gt; d</math>, Suy ra <math> a-b  &gt; \sqrt[3]{3ab}</math>.</li> </ul> <p><b>2) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn phương trình: <math>x^2 + y^2 = 3x + xy</math>.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Nhân 2 vế với 4 có <math>(2x - y - 3)^2 + 3(y-1)^2 = 12</math> Ta có <math>(2x - y - 3)^2</math> là số chính phương không vượt quá 12 và chia hết cho 3, do đó <math>2x - y - 3 = -3, 0, 3</math>.</li> <li>Giải từng trường hợp có: <math>(x, y) \in \{(3;3), (1;-1), (0;0), (3;0), (4;2), (1;2)\}</math></li> </ul>	<p><b>0,5đ</b></p> <p><b>0,5đ</b></p> <p><b>0,5đ</b></p>
<p>CauIV:2,5đ</p> <p><b>Câu V (1đ):</b></p>	<p>1) * Học sinh tự vẽ hình</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>C/m các tứ giác nội tiếp MDBF, MECF ( Có tổng 2 góc đối bằng <math>180^0</math>).</li> <li><math>M\hat{D}F = M\hat{B}F = M\hat{C}E = M\hat{F}E, M\hat{F}D = M\hat{B}D = M\hat{C}F = M\hat{E}F</math>. Tam giác MDF đồng dạng với tam giác MFE ( g - g)</li> </ul> <p>2) Từ kết quả trên suy ra <math>MD.ME = MF^2</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>AO cắt cung nhỏ BC và đoạn BC tại K, H là hai điểm cố định. Khi đó <math>MF \leq KH</math></li> <li><math>\frac{1}{MD^2} + \frac{1}{ME^2} \geq \frac{2}{MD.ME} = \frac{2}{MF^2} \geq \frac{2}{KH^2} = \frac{2(a^2 + r^2)}{r^2(a^2 + 2r^2 - 2r\sqrt{a^2 + r^2})}</math></li> </ul> <p>Dấu bằng xảy ra khi M trùng với K (Điểm chính giữa cung nhỏ BC).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>P(x) = x^2 + ax + b = (x + \frac{a}{2})^2 + \frac{4b - a^2}{4} &gt; 0, \forall x</math></li> <li>C/m : <math>P(x).P(x+1) = P(P(x)+x)</math> với mọi x</li> <li>Chọn <math>x = 2015, x = 2016</math> có: <math>\frac{P(2015).P(2016)}{P(2017).P(2016)} = \frac{P(P(2015)+2015)}{P(P(2016)+2016)} = \frac{P(2015)}{P(2017)}</math></li> <li>Vậy <math>m = 2015 + P(2015)</math> và <math>n = 2016 + P(2016)</math> thỏa mãn bài toán.</li> </ul>	<p>1,0đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>