Giải bài 3 trang 99 sgk toán Hình Học lớp 10

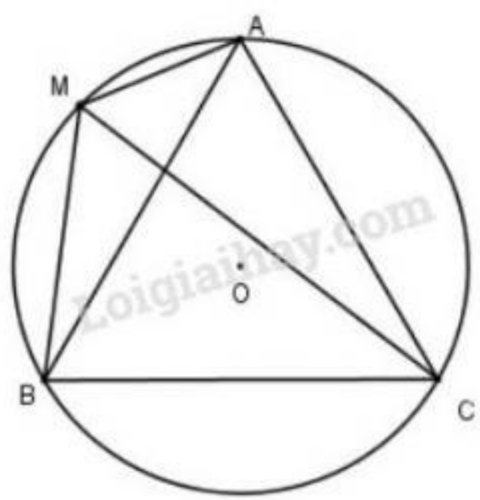
Đề bài

Cho tam giác đều **ABC** cạnh **a**

a) Cho **M** là một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác **ABC**.
Tính $MA^2 + MB^2 + MC^2$ theo **a**

b) Cho đường thẳng **d** tùy ý tìm điểm **N** trên đường thẳng **d** sao cho $NA^2 + NB^2 + NC^2$ nhỏ nhất

Đáp án



a) Ta có

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM})^2$$

$$= \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OM}^2 - 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA}^2 = 2R^2 - 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} (1)$$

Tương tự ta có:

$$MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = 2R^2 - 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OM} (2)$$

$$MC^2 = \overrightarrow{MC}^2 = 2R^2 - 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OM} (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2 - 2\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

Tam giác **ABC** là tam giác đều nội tiếp đường tròn tâm **O** nên tâm **O** cũng là trọng tâm của tam giác

ABC, cho ta $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$

Vậy $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$

Vì đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh a nên ta có:

$a = R\sqrt{3} \Rightarrow 6R^2 = 2(R\sqrt{3})^2$

Vậy $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$

b) Gọi **G** là trọng tâm tam giác ta có

$$\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NG} + \overrightarrow{GA}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{NA}^2 = \overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{NG}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}^2$$

Tương tự ta có:

$$\overrightarrow{NB}^2 = \overrightarrow{NG}^2 + 2\overrightarrow{NG}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}^2$$

$$\overrightarrow{NC}^2 = \overrightarrow{NG}^2 + 2\overrightarrow{NG}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}^2$$

$$\Rightarrow NA^2 + NB^2 + NC^2 = 3NG^2 + 2\overrightarrow{NG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

Vì **G** là trọng tâm của tam giác ta có

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 = 3GA^2$$

$$= 3.(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 = a^2$$

$$\Rightarrow NA^2 + NB^2 + NC^2 = a^2 + 3NG^2$$

a^2 là số không đổi nên tổng $NA^2 + NB^2 + NC^2$ nhỏ nhất khi NG đạt giá trị nhỏ nhất. Vì NG là khoảng cách từ G đến điểm N thuộc đường thẳng d nên NG nhỏ nhất khi $NG \perp d$ hay N là hình chiếu của trọng tâm G trên đường thẳng d.