

Giải toán lớp 12: Đáp án bài 2 trang 99 SGK hình học

Đề bài

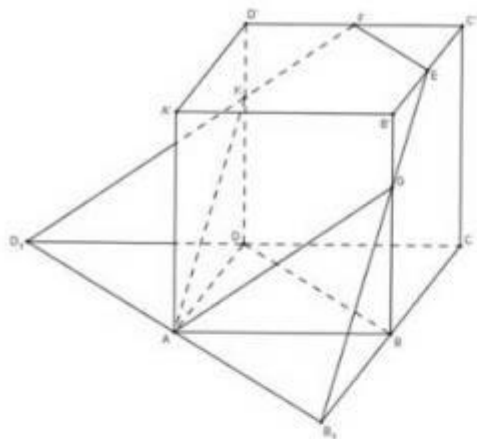
Cho khối lập phương ABCD . A'B'C'D' cạnh bằng a . Gọi E và F lần lượt là trung điểm của B'C ' và C'D ' . Mặt phẳng (AEF) chia khối lập phương đó thành hai khối đa diện (H) và (H') trong đó (H) là khối đa diện chứa đỉnh A ' . Tính thể tích của (H).

Hướng dẫn giải

Xác định thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng (AEF).

Phân chia và lắp ghép các khối đa diện

Tính thể tích của (H'): $V_{(H')} = V_{C'EF.CB_1D_1} - V_{A.BB_1D} - V_{DD_1K}$



Cách vẽ thiết diện:

Ta có $EF // B'D'$ mà $B'D' // BD$ nên từ A kẻ đường song song với BD , cắt CD kéo dài tại D_1 và CB kéo dài tại B_1 .

Nối B_1E cắt BB' tại G . Nối D_1F cắt DD' tại K .

Thiết diện là ngũ giác $AGEFK$.

Hình (H) là khối $AGEFK$. $A'B'D'$.

Theo giả thiết E là trung điểm của $B'C'$, F là trung điểm của $C'D'$, ta có $BB_1 = BC = a = 2B'E$
 $\Rightarrow BG = 2GB' = \frac{2}{3}a$

$$\text{Từ đó } V_{A.BB_1G} = \frac{1}{3}AB \cdot S_{BB_1G} = \frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{3}a = \frac{a^3}{9} = V_1$$

$$V_{(A.DD_1K)} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta DD_1K} \cdot AD = \frac{1}{9}a^3 = V_2$$

Ta có:

$$S_{\Delta CB_1D_1} = \frac{1}{2}CB_1 \cdot CD_1 = 2a^2,$$

$$S_{\Delta EC'F} = \frac{1}{2} \cdot C'E \cdot C'F = \frac{a^2}{8}$$

Chiều cao hình chóp cắt CB_1D_1 . $C'EF$ là $CC' = a$

$$V_{CC_1D_1.C'EF} = \frac{1}{3}a \left(2a^2 + \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{2} \right) = \frac{7a^3}{8}$$

Thể tích của khối (H') bằng:

$$V_{(H')} = V_{CC_1D_1.C'EF} - (V_1 + V_2) = \frac{7}{8}a^3 - \frac{2}{9}a^3 = \frac{47}{72}a^3$$

Từ đó thể tích của khối (H) bằng:

$$V_{(H)} = V_{\text{lập phương}} - V_{(H')} = a^3 - \frac{47}{72}a^3 = \frac{25}{72}a^3$$