

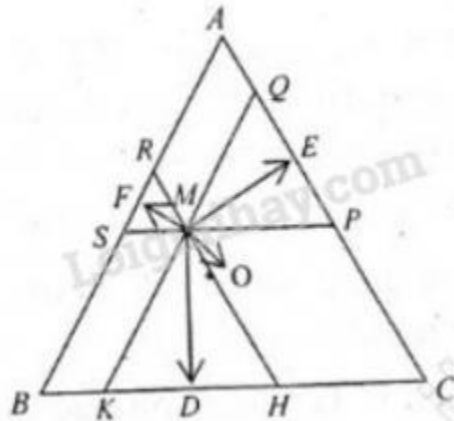
Giải bài 9 trang 17 sgk toán Đại Số lớp 10

Đề bài

Cho tam giác đều ABC có tâm O và M là một điểm tùy ý trong tam giác. gọi D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống BC, AC, AB. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2} \overrightarrow{MO}$$

Đáp án



Qua M kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác

$$A_1B_1 \parallel AB; A_2C_2 \parallel AC; B_2C_1 \parallel BC.$$

Dễ thấy các tam giác MB_1C_2 ; MA_1C_1 ; MA_2B_2 đều là các tam giác đều. Ta lại có $MD \perp B_1C_2$ nên MD cũng là trung điểm thuộc cạnh B_1C_2 của tam giác MB_1C_2

$$\text{Ta có } 2\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_2}$$

$$\text{Tương tự: } 2\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MC_1}$$

$$2\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_2}$$

$$\Rightarrow 2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) = (\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2}) + (\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2}) + (\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2})$$

Tứ giác là hình bình hành nên:

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} = \overrightarrow{MA}$$

Tương tự: $\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2} = \overrightarrow{MB}$

$$\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2} = \overrightarrow{MC}$$

$$\Rightarrow 2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

Vì O là trọng tâm bất kỳ và M là một điểm bất kỳ nên

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MO}$$

Cuối cùng ta có:

$$2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) = 3\overrightarrow{MO}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$$