BÀI 12 TRANG 27 SGK GIẢI TÍCH LỚP 12 - CÁCH LÀM VÀ ĐÁP ÁN

Đề bài

Cho hình lập phương **ABCD . A′B′C′D′** cạnh a . Gọi **M** là trung điểm của **A′B′** , N là trung điểm của **BC** .

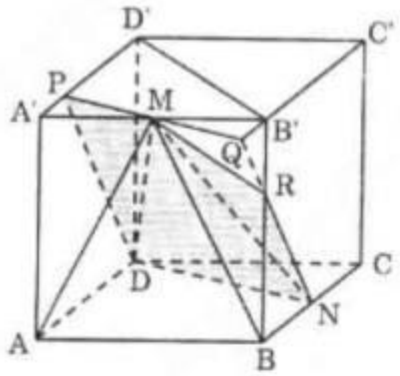
a) Tính thể tích khối tứ diện **ADMN** .

b) Mặt phẳng (**DMN**) chia khối lập phương đã cho thành hai khối đa diện. Gọi (**H**) là khối đa diện chứa đỉnh **A** , (**H′**) là khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}}$.

Hướng dẫn giải

a) Coi khối tứ diện ADMN có đỉnh M và đáy ADN. Sử dụng công thức tính thể tích khối chóp: $V_{ADMN} = V_{M.ADN} = \frac{1}{3}d\left(M;(ADN)\right).S_{ADN}$.

b) Dựng thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng (D M N) , xác định hai phần khối đa diện cần tính thể tích .



a) Ta tính thể tích hình chóp $M.ADN$. Hình chóp này có chiều cao bằng khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ANCD) bằng a và diện tích đáy $S_{ADN} = \frac{1}{2}.a.a = \frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow V_{ADMN} = \frac{1}{3}d(M;(ADN)).S_{ADN} = \frac{1}{3}.a.\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3}{6}$

b) Trước hết, ta dựng thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi (DMN).

Do $(ABCD)//(A'B'C'D')$ nên (DMN) cắt $(A'B'C'D')$ theo một giao tuyến song song với DN. Ta dựng thiết diện như sau:

- Từ M kẻ đường thẳng song song với DN, đường này cắt cạnh $A'D'$ tại điểm P và cắt đường thẳng $C'B'$ tại điểm Q. Trong mặt phẳng $(BCC'B')$ thì QN cắt cạnh BB' tại điểm R, đa giác $DNRMP$ chính là thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi (DMN).

- Bây giờ ta tính thể tích khối đa diện $ABNDPMR$. Ta có:

$$V_{ABNDPMR} = V_{M.ABND} + V_{M.NRB} + V_{M.AA'PD} = V_1 + V_2 + V_3$$

Hình chóp $M.ABND$, có đường cao bằng a, diện tích đáy là hình thang $ABND$ là: $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+a\right).a = \frac{3a^2}{4}$

Suy ra: $V_1 = \frac{1}{3}.\frac{3a^2}{4}.a \Rightarrow V_1 = \frac{a^3}{4}$

Dễ dàng chứng minh được ΔCND và $\Delta A'PM$ đồng dạng (g.g) nên $\frac{A'P}{CN} = \frac{A'M}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow A'P = \frac{1}{2}CN = \frac{a}{4}$

Hình chóp $M.AA'PD$ có chiều cao $\frac{a}{2}$ và diện tích hình thang $AA'PD$ là: $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{4}+a\right).a = \frac{5a^2}{8}$

Suy ra: $V_2 = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{5a^2}{8} \Rightarrow V_2 = \frac{5a^3}{48}$

Ta có: $\Delta A'PM = \Delta B'QM \Rightarrow B'Q = A'P$

$\Rightarrow \frac{B'R}{BR} = \frac{B'Q}{NB} = \frac{1}{2} \Rightarrow BR = \frac{2a}{3}$

Diện tích tam giác NRB là: $\frac{1}{2}.\frac{2}{3}a.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{6}$

Hình chóp $M.NRB$ có chiều cao $\frac{a}{2}$ và diện tích đáy $\frac{a^2}{6}$ nên:

$V_3 = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2}{6} \Rightarrow V_3 = \frac{a^3}{36}$

$V_{ABNDPMR} = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{5a^3}{48} + \frac{a^3}{4} + \frac{a^3}{36} = \frac{55a^3}{144}$

Thể tích phần còn lại là: $\frac{144a^3}{144} - \frac{55a^3}{144} = \frac{89a^3}{144}$

Từ đây suy ra tỉ số cần tìm là: $\frac{55}{89}$