

Đề bài

Cho hàm số $y = \frac{2}{2-x}$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
- b) Tìm các giao điểm của (C) và đồ thị của hàm số $y = x^2 + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại mỗi giao điểm.
- c) Tính thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và các đường thẳng $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ xung quanh trục O x .

Hướng dẫn giải

- a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số theo các bước đã được học.
- b) Giải phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (C) với đồ thị hàm số $y = x^2 + 1$ tìm các giao điểm.

+) Sau đó lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) dựa vào công thức:
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ có công thức: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$.
- c) Khi quay hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$) quanh trục O x có thể tích được tính bởi công thức:

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx.$$

a) _ Tập xác định: $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

_ Sự biến thiên: $y' = \frac{2}{(2-x)^2} > 0, \forall x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Nên hàm số đồng biến trên hai khoảng này.

_ Hàm số không có cực trị

_ Giới hạn tại vô cực và tiệm cận ngang

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2-x} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2-x} = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

_ Giới hạn vô cực và tiệm cận đứng

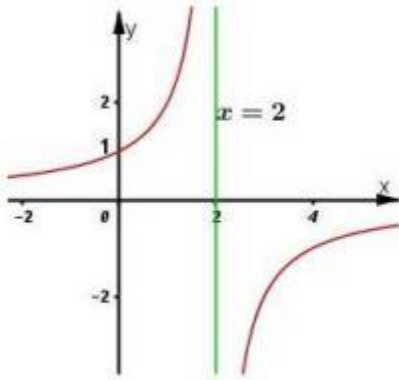
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{2}{2-x} \right) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{2}{2-x} \right) = -\infty$$

$\Rightarrow x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

_ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+		+
y	0	$+\infty$	0

Đồ thị hàm số:



Đồ thị hàm số:

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ $y = 1$, không cắt trục hoành.

b) Phương trình xác định hoành độ giao điểm của hai đồ thị là:

$$\frac{2}{2-x} = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$$

Hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm $M_1(0; 1)$; $M_2(1; 2)$.

Tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = \frac{2}{2-x}$ tại điểm M_1 có phương trình là: $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Tiếp tuyến tại điểm M_2 có phương trình $y = 2(x-1) + 2 = 2x$.

c) Trong khoảng $(0; 1)$ đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành nên thể tích cần tính là :

$$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{2-x}\right)^2 = \pi \cdot \frac{4}{2-x} \Big|_0^1 = 2\pi.$$