

Lời giải bài 5 trang 92 SGK toán đại số và giải tích lớp 11

Hướng dẫn giải bài 5 trang 92 SGK đại số và giải tích lớp 11. Chương 3. Dãy số, cấp số cộng và cấp số nhân. Bài 2. Dãy Số

1. Đề bài

Trong các dãy số sau, dãy số nào bị chặn dưới, dãy số nào bị chặn trên, dãy số nào bị chặn?

$$\text{a) } u_n = 2n^2 - 1;$$

$$\text{b) } u_n = \frac{1}{n(n+2)}$$

$$\text{c) } u_n = \frac{1}{2n^2 - 1};$$

$$\text{d) } u_n = \sin n + \cos n$$

2. Đáp án - hướng dẫn

Lời giải bài 5 trang 92 SGK toán đại số và giải tích lớp 11

a) Dãy số bị chặn dưới vì $u_n = 2n^2 - 1 \geq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và không bị chặn trên vì:

Với số M dương lớn bất kì, ta có $2n^2 - 1 > M \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{M+1}{2}}$, tức là luôn tồn tại

$$n \geq \left[\sqrt{\frac{M+1}{2}} \right] + 1 \text{ để } 2n^2 - 1 > M$$

b) Dễ thấy $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mặt khác, vì:

$$\begin{cases} n \geq 1 \Rightarrow n^2 \geq 1 \\ 2n \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n(n+2) = n^2 + 2n \geq 1 + 2 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n(n+2)} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow u_n \leq \frac{1}{3} \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số bị chặn $0 < u_n \leq \frac{1}{3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

c) Ta có:

$$n^2 \geq 1 \Leftrightarrow 2n^2 \geq 2 \Leftrightarrow 2n^2 - 1 \geq 1 > 0$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2n^2 - 1} \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vậy $0 < u_n \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}^*$, tức dãy số bị chặn.

d) Ta có:

$$\sin n + \cos n = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin n + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos n \right)$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(n + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sin n + \cos n \leq \sqrt{2} \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vậy $-\sqrt{2} \leq u_n \leq \sqrt{2} \forall n \in \mathbb{N}^*$, tức là dãy số là dãy bị chặn.