

Giải bài 4 trang 160 sgk toán Đại Số lớp 10

Đề bài:

Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $5(x - 1) < x^5 - 1 < 5x^4(x - 1)$, biết $x - 1 > 0$

b) $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 \geq 0$, biết $x + y \geq 0$

c) $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5$, biết rằng a, b, c cùng lớn hơn $-\frac{1}{4}$ và $a + b + c = 1$.

Đáp án:

a) $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Rightarrow x^4 > x^3 > x^2 > x > 1$

$\Rightarrow 5x^4 > x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 5$

$\Rightarrow 5x^4(x - 1) > (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1 > 5(x - 1)$

Vậy $5(x - 1) < x^5 - 1 < 5x^4(x - 1)$ khi $x > 1$.

b) $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) - xy(x^3 + y^3)$

$= (x + y)[(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) - xy(x^2 - xy + y^2)]$

$= (x + y)[(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - 2xy(x^2 + y^2)]$

$= (x + y)(x - y)^2(x^2 + y^2) \geq 0$ do $x + y \geq 0$; $(x - y)^2 \geq 0$, $x^2 + y^2 \geq 0$

c) $(\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1})^2$

$= 4(a + b + c) + 3 + 2\sqrt{4a+1}\sqrt{4b+1} + 2\sqrt{4a+1}\sqrt{4c+1} + 2\sqrt{4b+1}\sqrt{4c+1}$

$\leq 4(a + b + c) + 3 + (4a + 1) + (4b + 1) + (4a + 1) + (4c + 1) + (4b + 1) + (4c + 1)$

$\leq 12(a + b + c) + 9 \leq 21 \leq 25$

Suy ra đpcm