

Đáp án bài 1 trang 82 sách giáo khoa đại số và giải tích lớp 11

Hướng dẫn giải bài 1 trang 82 SGK đại số và giải tích lớp 11 Chương 3. Dãy số, cấp số cộng và cấp số nhân

1. Đề bài

Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức:

$$\text{a) } 2 + 5 + 8 + \dots + 3n - 1 = \frac{n(3n+1)}{2};$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n};$$

$$\text{c) } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Đáp án - hướng dẫn

Đáp án bài 1 trang 82 sách giáo khoa đại số và giải tích lớp 11

a) Với $n = 1$, vế trái chỉ có một số hạng là 2, vế phải bằng $\frac{1 \cdot (3 \cdot 1 + 1)}{2} = 2$. Do đó hệ thức a) đúng với $n = 1$.

Đặt vế trái bằng S_n

Giả sử đẳng thức a) đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$S_k = 2 + 5 + 8 + \dots + 3k - 1 = \frac{k(3k+1)}{2}$$

Ta phải chứng minh rằng a) cũng đúng với $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 2 + 5 + 8 + \dots + 3k - 1 + (3(k+1) - 1) \\ &= \frac{(k+1)(3(k+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp, ta có: $S_{k+1} = S_k + 3k + 2 = \frac{k(3k+1)}{2} + 3k + 2$

$$= \frac{3k^2 + k + 6k + 4}{2} = \frac{3(k^2 + 2k + 1) + k + 1}{2} = \frac{(k+1)(3(k+1)+1)}{2} \text{ (điều phải chứng minh)}$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp toán học, hệ thức a) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

b) Với $n = 1$, vế trái bằng $\frac{1}{2}$, vế phải bằng $\frac{1}{2}$, do đó hệ thức đúng với $n = 1$.

Đặt vế trái bằng S_n .

Giả sử hệ thức b) đúng với $n = k \geq 1$, tức là $S_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^k} = \frac{2^k - 1}{2^k}$

Ta phải chứng minh $S_{k+1} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$.

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy, từ giả thiết quy nạp, ta có: } S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= \frac{2^{k+1} - 2 + 1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} \text{ (điều phải chứng minh)} \end{aligned}$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp toán học, hệ thức b) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

c) Với $n = 1$, vế trái bằng 1, vế phải bằng $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$ nên hệ thức c) đúng với $n = 1$.

Đặt vế trái bằng S_n .

Giả sử hệ thức c) đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$S_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Ta phải chứng minh $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (k+1) \cdot \frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6} = (k+1) \frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k(k+2) + 3(k+2))}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp toán học, hệ thức c) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Đáp án bài 1 trang 82 sách giáo khoa đại số và giải tích lớp 11