

Đề bài

Giải các bất phương trình

a) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geq 448$

b) $(0,4)^x - (2,5)^{x+1} > 1,5$

c) $\log_3 [\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 1)] < 1$

d) $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$

Hướng dẫn giải

a) Đặt nhân tử chung 2^{2x-3} , đưa bất phương trình mũ về dạng cơ bản:

$$a^x \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ x \geq \log_a b \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x \leq \log_a b \end{cases}$$

b) Đặt ẩn phụ $t = (0,4)^x$, để ý rằng: $0,4 \cdot 2,5 = 1 \Rightarrow (0,4)^x \cdot (2,5)^x = 1 \Rightarrow (2,5)^x = \frac{1}{(0,4)^x}$

c) Giải bất phương trình logarit cơ bản:

$$\log_a f(x) < b \Rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < a^b \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > a^b \end{cases}$$

d) Đặt ẩn phụ $t = \log_{0,2} x$.

$$\begin{aligned}
 a) & 2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geq 448 \\
 \Leftrightarrow & 2^{2x-3} \cdot 2^2 + 2^{2x-3} \cdot 2^1 + 2^{2x-3} \geq 448 \\
 \Leftrightarrow & 2^{2x-3} (4 + 2 + 1) \geq 448 \\
 \Leftrightarrow & 7 \cdot 2^{2x-3} \geq 448 \\
 \Leftrightarrow & 2^{2x-3} \geq 64 \\
 \Leftrightarrow & 2x - 3 \geq \log_2 64 = 6 \\
 \Leftrightarrow & x \geq \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = [\frac{9}{2}; +\infty)$.

$$\begin{aligned}
 b) & (0,4)^x - (2,5)^{x+1} > 1,5 \\
 \Leftrightarrow & (0,4)^x - 2,5 \cdot (2,5)^x > 1,5 \\
 \Leftrightarrow & (0,4)^x - 2,5 \cdot \frac{1}{(0,4)^x} > 1,5
 \end{aligned}$$

Đặt $t = (0,4)^x > 0$, bất phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned}
 t - \frac{2,5}{t} > 1,5 & \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 5 > 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} t < -1 \\ t > 2,5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Do $t = (0,4)^x > 0$, bất phương trình đã cho tương đương với:

$$(0,4)^x > 2,5 \Leftrightarrow (0,4)^x > (0,4)^{-1} \Leftrightarrow x < -1$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1)$.

$$c) \text{ĐK: } \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 1) > 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 < (\frac{1}{2})^0 = 1 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{2}; 1) \cup (-1; \sqrt{2})$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
 & \log_3 [\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 1)] < 1 \\
 \Leftrightarrow & \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 1) < 3^1 = 3 \quad (\text{Do } 3 > 1) \\
 \Leftrightarrow & x^2 - 1 > (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8} \quad (\text{Do } 0 < \frac{1}{2} < 1) \\
 \Leftrightarrow & x^2 > \frac{9}{8} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x > \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ x < -\frac{3}{2\sqrt{2}} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có: $x \in (-\sqrt{2}; -\frac{3}{2\sqrt{2}}) \cup (\frac{3}{2\sqrt{2}}; \sqrt{2})$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (-\sqrt{2}; -\frac{3}{2\sqrt{2}}) \cup (\frac{3}{2\sqrt{2}}; \sqrt{2})$.