

### Đề bài

Tính:

a)  $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$

b)  $\int_1^{64} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$

c)  $\int_0^2 x^2 e^{3x} dx$

d)  $\int_0^\pi \sqrt{1+\sin 2x} dx$

### Hướng dẫn giải

+) Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ và các công thức tính tích phân cơ bản để tính tích phân.

+) Chú ý: Khi đổi biến cần đổi cận.

a) Đặt  $t = \sqrt{1+x}$ , ta được:  $x = t^2 - 1, dx = 2tdt$

Khi  $x = 0$  thì  $t = 1$ , khi  $x = 3$  thì  $t = 2$ .

Do đó:

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx &= \int_1^2 \frac{t^2-1}{t} \cdot 2tdt = 2 \int_1^2 (t^2-1) dt \\ &= 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^2 = 2 \left( \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{8}{3}\end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}\int_1^{64} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int_1^{64} \frac{1+x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \int_1^{64} (x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}}) dx \\ &= \left( \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} \right) \Big|_1^{64} = \frac{1872}{14} - \frac{33}{14} = \frac{1839}{14}.\end{aligned}$$

c) Ta có:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2 e^{3x} dx &= \frac{1}{3} \int_0^2 x^2 de^{3x} = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} \Big|_0^2 \\ &\quad - \frac{2}{3} \int_0^2 x e^{3x} dx = \frac{4}{3} e^6 - \frac{2}{9} (x e^{3x}) \Big|_0^2 + \frac{2}{27} \int_0^2 e^{3x} d(3x) \\ &= \frac{4}{3} e^6 - \frac{4}{9} e^6 + \frac{2}{27} e^{3x} \Big|_0^2 = \frac{2}{27} (13e^6 - 1)\end{aligned}$$

d) Ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\sin 2x} &= \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} \\ &= |\sin x + \cos x| = \sqrt{2} \left| \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right| \\ &= \begin{cases} \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right), & x \in \left[ 0, \frac{3\pi}{4} \right] \\ \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right), & x \in \left[ \frac{3\pi}{4}, \pi \right] \end{cases}\end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sqrt{1+\sin 2x} dx &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) d \left( x + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \int_{\frac{3\pi}{4}}^\pi \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) d \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= -\sqrt{2} \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} + \sqrt{2} \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^\pi = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$