

GIẢI TOÁN LỚP 12: ĐÁP ÁN BÀI 5 TRANG 121 SGK GIẢI TÍCH

Đề bài

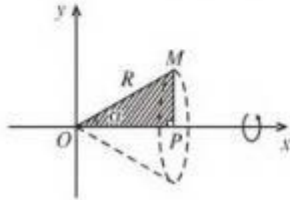
Cho tam giác vuông OPM có cạnh OP nằm trên trục Ox . Đặt $\widehat{POM} = \alpha$

và $OM = R$, $(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}, R > 0)$

Gọi \mathcal{V} là khối tròn xoay thu được khi quay tam giác đó xung quanh Ox (H.63).

a) Tính thể tích của \mathcal{V} theo α và R .

b) Tìm α sao cho thể tích \mathcal{V} là lớn nhất.



Hướng dẫn giải

a) Hình phẳng cần tính thể tích được giới hạn bởi đoạn thẳng OM, MP và trục hoành.

+) Xác định phương trình đường thẳng OM và sử dụng công thức tính thể tích để tính thể tích khối tròn xoay \mathcal{V} cần tính.

b) Tính được thể tích của khối tròn xoay theo α . Khảo sát hàm số $V = V(\alpha)$ để tìm thể tích lớn nhất.

ĐÁP ÁN BÀI 5 TRANG 121 SGK GIẢI TÍCH LỚP 12

$$a) \text{ Ta có: } \begin{cases} x_M = OP = R \cos \alpha \\ y_M = PM = R \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \frac{x_M}{\cos \alpha} \\ y_M = \frac{x_M}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow y_M = x_M \tan \alpha.$$

\Rightarrow Phương trình đường thẳng OM là: $y = x \cdot \tan \alpha$.

Khi đó thể tích của khối tròn xoay là:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{R \cos \alpha} x^2 \tan^2 \alpha dx = \pi \tan^2 \alpha \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{R \cos \alpha} \\ &= \frac{\pi R^3}{3} \cdot \tan^2 \alpha \cdot \cos^3 \alpha = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \\ &= \frac{\pi R^3}{3} \cdot \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = \frac{\pi R^3}{3} (\cos \alpha - \cos^3 \alpha). \quad (\text{dvt}) \end{aligned}$$

$$b) \text{ Xét hàm số: } V(\alpha) = \frac{\pi R^3}{3} (\cos \alpha - \cos^3 \alpha).$$

Đặt $t = \cos \alpha$.

$$\text{Với } \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow t \in \left[0; \frac{1}{2}\right].$$

Khi đó ta xét hàm: $V(t) = \frac{\pi R^3}{3} (t - t^3)$ trên $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

$$\text{Có: } V'(t) = \frac{\pi R^3}{3} (1 - 3t^2) \Rightarrow V'(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (tm) \\ t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (ktm) \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

t	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{2}$	
$V'(t)$		+	0	-
$V(t)$	0	$\frac{2\sqrt{3}}{27} \pi R^3$	$\frac{3}{8} \pi R^3$	

\Rightarrow Hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $t = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy thể tích khối ϑ lớn nhất khi $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài 3. Ứng dụng của tích phân trong hình học