

Đề bài

Sử dụng phương pháp biến đổi số, tính tích phân:

a) $\int_0^3 \frac{x^3}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} dx$ (Đặt $u = x + 1$)

b) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ (Đặt $x = \sin t$)

c) $\int_0^1 \frac{e^x(1+x)}{1+x.e^x} dx$ (Đặt $u = 1 + x.e^x$)

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$ (Đặt $x = a \sin t$)

Hướng dẫn giải

a) Đặt $u = x + 1$.

b) Đặt $x = \sin t$.

c) Đặt $u = 1 + x.e^x$.

d) Đặt $x = a \sin t$.

ĐÁP ÁN BÀI 3 TRANG 113 SGK GIẢI TÍCH LỚP 12

a) Đặt $u = x + 1 \Rightarrow du = dx$ và $x = u - 1$.

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x = 3 \Rightarrow u = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{x^2}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int_1^4 \frac{(u-1)^2}{u^{\frac{3}{2}}} du = \int_1^4 \frac{u^2 - 2u + 1}{u^{\frac{3}{2}}} du \\ &= \int_1^4 \left(u^{\frac{1}{2}} - 2u^{-\frac{1}{2}} + u^{-\frac{3}{2}} \right) du \\ &= \left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 4u^{\frac{1}{2}} - 2u^{-\frac{1}{2}} \right) \Big|_1^4 \\ &= -\frac{11}{3} - \left(-\frac{16}{3} \right) = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

b) Đặt $x = \sin t, 0 < t < \frac{\pi}{2}$. Ta có: $dx = \cos t dt$

$$\text{và } \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t.$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

c) Đặt $t = 1 + x.e^x \Rightarrow dt = (e^x + x.e^x) dx = e^x (1 + x) dx$.

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 + e \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^1 \frac{e^x(1+x)}{1+xe^x} dx &= \int_1^{1+e} \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_1^{1+e} \\ &= \ln(1+e) - \ln 1 = \ln(1+e) \end{aligned}$$

d) Đặt $x = a \sin t \Rightarrow dx = a \cos t dt$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{a}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a \cos t dt}{\sqrt{a^2-a^2 \sin^2 t}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a \cos t dt}{a \cdot \cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$