BÀI 4 TRANG 101 SGK GIẢI TÍCH LỚP 12 - CÁCH LÀM VÀ ĐÁP ÁN

Đề bài

Sử dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, hãy tính:

a) $\int x\ln(1+x)dx$; b) $\int (x^2+2x-1)e^x dx$

c) $\int x\sin(2x+1)dx$; d) $\int (1-x)\cos x dx$

Hướng dẫn giải

Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần:

Đặt $\begin{cases} u = u(x) \\ dv = v'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = u'(x)dx \\ v = v(x) \end{cases}$.

Khi đó ta có: $\int f(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$.

ĐÁP ÁN BÀI 4 TRANG 101 SGK GIẢI TÍCH LỚP 12

a) $\int x\ln(1+x)dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1}dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

$$\Rightarrow \int x\ln(1+x)dx = \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \int \frac{x^2}{2(x+1)}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\int\left(\frac{x^2-1}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)\right) + C$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x) + C$$

$$= \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C.$$

b) $\int \left(x^2+2x-1\right) e^x dx$.

Đặt: $\begin{cases} u = x^2+2x-1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2x+2)\, dx \\ v = e^x \end{cases}$.

$\Rightarrow \int \left(x^2+2x-1\right) e^x dx = \left(x^2+2x-1\right) e^x - \int (2x+2)\, e^x dx$

$= \left(x^2+2x-1\right) e^x - 2\int (x+1)\, e^x dx$.

Xét $\int (x+1)\, e^x dx$:

Đặt: $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$.

$\Rightarrow \int (x+1)\, e^x dx = (x+1)\, e^x - \int e^x dx$

$= (x+1)\, e^x - e^x + C = xe^x + C$.

$\Rightarrow \int \left(x^2+2x-1\right) e^x dx = \left(x^2+2x-1\right) e^x - 2xe^x + C$

$= \left(x^2-1\right) e^x + C$.

c) $\int x \sin(2x+1) dx$.

Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin(2x+1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) \end{cases}$.

$\Rightarrow \int x \sin(2x+1) dx = -\frac{1}{2} x \cos(2x+1) + \frac{1}{2} \int \cos(2x+1) dx$

$= -\frac{1}{2} x \cos(2x+1) + \frac{1}{4} \sin(2x+1) + C$.

d) $\int (1-x) \cos x dx$

Đặt: $\begin{cases} u = 1-x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = \sin x \end{cases}$.

$\Rightarrow \int (1-x) \cos x dx = (1-x) \sin x + \int \sin x dx$

$= (1-x) \sin x - \cos x + C$.

a) Cách 1: Đặt $u = 1 - x \Rightarrow du = -dx$. Khi đó ta được $-\int u^9 du = -\frac{1}{10}u^{10} + C$

Suy ra $\int (1-x)^9 dx = -\frac{(1-x)^{10}}{10} + C$

Cách 2: $\int (1-x)^9 dx = -\int (1-x)^9 d(1-x) = -\frac{(1-x)^{10}}{10} + C$

b) $\int x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} dx.$

Cách 1: Đặt $u = 1 + x^2 \Rightarrow du = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}du.$

$\Rightarrow \int \frac{1}{2}u^{\frac{3}{2}}du = \frac{1}{2}.\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{5} + C = \frac{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + C.$

Cách 2:

$\int x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{3}{2}} d(1+x^2)$

$= \frac{1}{2}.\frac{2}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}} + C = \frac{1}{5}.(1+x^2)^{\frac{5}{2}} + C$

c) $\cos^3 x.\sin x dx.$

Cách 1: Đặt: $t = \text{cosx} \Rightarrow du = -sinxdx.$

$\Rightarrow \int \cos^3 x.\,\text{sinxdx} = \int -u^3 du$

$= -\frac{1}{4}u^4 + C = -\frac{1}{4}\cos^4 x + C.$

Cách 2:

$\int cos^3 x sinx dx = -\int cos^3 x d(cosx)$

$= -\frac{1}{4}.cos^4 x + C.$

d) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x} + 2}.$

Cách 1:

Ta có: $e^x + e^{-x} + 2 = e^x + \frac{1}{e^x} + 2 = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1}{e^x} = \frac{(e^x+1)^2}{e^x}.$

$\Rightarrow \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}.$

Đặt $u = e^x + 1 \Rightarrow du = e^x dx.$

$\Rightarrow \int \frac{dx}{e^x + e^{-x} + 2} = \int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{e^x+1} + C.$

Cách 2:

$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x} + 2} = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1}dx$

$= \int \frac{d(e^x+1)}{(e^x+1)^2}dx = \frac{-1}{e^x+1} + C.$