

Giải toán lớp 11: Đáp án bài 6 trang 58 SGK đại số và giải tích

Đáp án bài 6 trang 58 SGK đại số và giải tích lớp 11. Chương 2: Tổ Hợp - Xác Suất, Nhị thức Niu – Tơn

1. Đề bài

Chứng minh rằng:

a) $11^{10} - 1$ chia hết cho 100;

b) $101^{100} - 1$ chia hết cho 10000;

c) $\sqrt{10}[(1 + \sqrt{10})^{100} - (1 - \sqrt{10})^{100}]$ là một số nguyên.

2. Đáp án

Giải toán lớp 11: Đáp án bài 6 trang 58 SGK đại số và giải tích

$$\begin{aligned} \text{a) } 11^{10} - 1 &= (1 + 10)^{10} - 1 = (1 + C_{10}^1 \cdot 10 + C_{10}^2 \cdot 10^2 \\ &+ \dots + C_{10}^9 \cdot 10^9 + 10^{10}) - 1 \\ &= 10^2 + C_{10}^2 \cdot 10^2 + \dots + C_{10}^9 \cdot 10^9 + 10^{10} \end{aligned}$$

Tổng sau cùng chia hết cho $10^2 = 100$ suy ra $11^{10} - 1$ chia hết cho 100.

b) Ta có

$$\begin{aligned} 101^{100} - 1 &= (1 + 100)^{100} - 1 \\ &= (1 + C_{100}^1 \cdot 100 + C_{100}^2 \cdot 100^2 + \dots + \\ &C_{100}^{99} \cdot 100^{99} + 100^{100}) - 1 \\ &= 100^2 + C_{100}^2 \cdot 100^2 + \dots + C_{100}^{99} \cdot 100^{99} + 100^{100} \end{aligned}$$

Tổng sau cùng chia hết cho $100^2 = 10000$ suy ra $101^{100} - 1$ chia hết cho 10000.

c) Ta có:

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{10})^{100} &= 1 + C_{100}^1 \sqrt{10} + C_{100}^2 (\sqrt{10})^2 + \dots \\ &+ C_{100}^{99} (\sqrt{10})^{99} + (\sqrt{10})^{100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{10})^{100} &= 1 - C_{100}^1 \sqrt{10} + C_{100}^2 (\sqrt{10})^2 - \dots \\ &- C_{100}^{99} (\sqrt{10})^{99} + (\sqrt{10})^{100} \end{aligned}$$

$$\sqrt{10} \left[(1 + \sqrt{10})^{100} - (1 - \sqrt{10})^{100} \right] =$$

$$2\sqrt{10} \cdot \left[C_{100}^1 \sqrt{10} + C_{100}^3 (\sqrt{10})^3 + \dots + C_{100}^{99} (\sqrt{10})^{99} \right]$$

$$= 2 (C_{100}^1 \cdot 10 + C_{100}^3 \cdot 10^2 + \dots + C_{100}^{99} \cdot 10^{50})$$

Tổng sau cùng là một số nguyên, suy ra $\sqrt{10}[(1 + 10)^{100} - (1 - \sqrt{10})^{100}]$ là một số nguyên.