

GIẢI TOÁN LỚP 12: ĐÁP ÁN BÀI 11 TRANG 46 SGK GIẢI TÍCH

Đề bài

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị **(C)** của hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$
- b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của đường thẳng $y = 2x + m$ luôn cắt **(C)** tại hai điểm phân biệt M và N.
- c) Xác định m sao cho độ dài **MN** nhỏ nhất.
- d) Tiếp tuyến tại một điểm S bất kì của C cắt hai tiệm cận của C tại **P** và **Q**. Chứng minh rằng S là trung điểm của **PQ**.

Hướng dẫn giải

- a) Khảo sát và vẽ đồ thị qua các bước đã được học.
- b) Chứng minh phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số có hai nghiệm phân biệt khác -1 với mọi M

c) Với hai điểm M và N tìm được ở câu trên, tính độ dài đoạn thẳng MN theo công thức:

$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{f(x)}.$$

+) Khảo sát và tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ từ đó suy ra độ dài nhỏ nhất của MN.

d) Gọi $S(x_0; y_0)$ là 1 điểm bất kì thuộc đồ thị hàm số (C). Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại S là: $\Delta: y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

+) Tìm các giao điểm P, Q của tiếp tuyến Δ với các đường tiệm cận.

+) Khi đó S là trung điểm của PQ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{x_P + x_Q}{2} \\ y_0 = \frac{y_P + y_Q}{2} \end{cases}$.

a) Xét hàm số: $y = \frac{x+3}{x+1}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

* Sự biến thiên:

$$y' = \frac{-2}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in D$$

- Hàm số nghịch biến trên khoảng: $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

- Cực trị: Hàm số không có cực trị.

- Tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$$

Tiệm cận đứng: $x = -1$.

Tiệm cận ngang: $y = 1$.

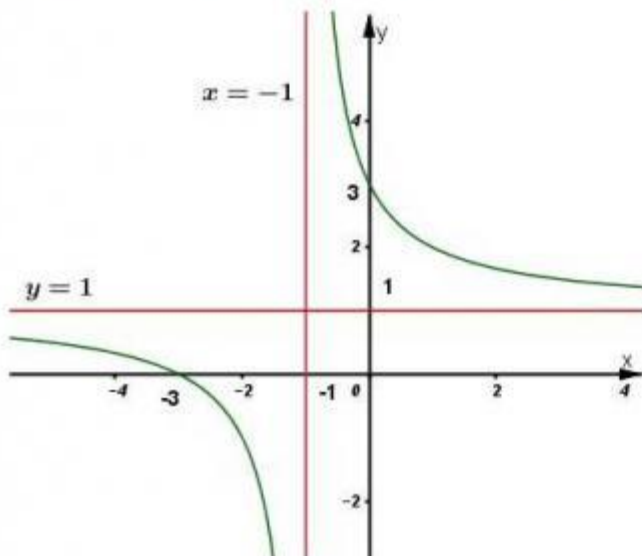
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	—		—
y	1 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 1	

* Đồ thị:

Đồ thị hàm số giao Ox tại $(-3; 0)$, giao Oy tại $(0; 3)$

Đồ thị hàm số nhận điểm $I(-1; 1)$ làm tâm đối xứng.



b) Xét phương trình có nghiệm là hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $(d): y = 2x + m$ (1)

$$\frac{x+3}{x+1} = 2x+m \Leftrightarrow x+3 = (2x+m)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (m+1)x + m - 3 = 0, x \neq -1$$

$$\Delta = (m+1)^2 - 4.2(m-3)$$

$$= m^2 + 2m + 1 - 8m + 24$$

$$= m^2 - 6m + 25$$

$$= (m-3)^2 + 16 > 0$$

$\Rightarrow$ (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Lại có: $f(-1) = 2.(-1)^2 - (m+1) + m - 3 = -2 \neq 0$ hay phương trình (1) có nghiệm khác -1 .

Vậy phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt khác -1 với mọi m .

Vậy (d) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N (hoành độ của M, N chính là nghiệm của (1)).

c) Gọi $M(x_M; y_M)$ và $N(x_N; y_N)$ là hai giao điểm của (C) và đường thẳng $y = 2x + m$.

Theo định lý Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_M + x_N = -\frac{m+1}{2} \\ x_M \cdot x_N = \frac{m-3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} MN^2 &= (x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 \\ &= (x_M - x_N)^2 + [2x_M + m - (2x_N + m)]^2 \\ &= (x_M - x_N)^2 + 4(x_M - x_N)^2 \\ &= 5(x_M - x_N)^2 \\ &= 5[(x_M + x_N)^2 - 4x_M x_N] \\ &= 5\left[\left(-\frac{m+1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{m-3}{2}\right] \\ &= 5\left(\frac{m^2+2m+1}{4} - 2m + 6\right) \\ &= 5 \cdot \frac{m^2-6m+25}{4} \\ &= \frac{5}{4}[(m^2 - 6m + 9) + 16] \\ &= \frac{5}{4}[(m-3)^2 + 16]. \end{aligned}$$

Ta có: $(m-3)^2 \geq 0 \forall m \Rightarrow (m-3)^2 + 16 \geq 16$

$$\Rightarrow MN^2 \geq \frac{5}{4} \cdot 16 = 20.$$

$$\Rightarrow MN \geq 2\sqrt{5}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

Vậy độ dài MN nhỏ nhất bằng $2\sqrt{5}$ khi $m = 3$.

d) Giả sử $S(x_0; y_0)$ là điểm bất kì thuộc (C)

Phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại S là:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-2}{(x_0 + 1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 + 3}{x_0 + 1}$$

Tiệm cận đứng: $x = -1$ và tiệm cận ngang: $y = 1$.

Giả sử Δ cắt tiệm cận ngang tại $P(x_P; 1)$. Khi đó:

$$\frac{-2}{(x_0 + 1)^2}(x_P - x_0) + \frac{x_0 + 3}{x_0 + 1} = 1$$

$$\Leftrightarrow -2x_P + 2x_0 + x_0^2 + 4x_0 + 3 = x_0^2 + 2x_0 + 1$$

$$\Leftrightarrow -2x_P = -4x_0 - 2$$

$$\Leftrightarrow x_P = 2x_0 + 1$$

$$\Rightarrow P(2x_0 + 1; 1).$$

Δ cắt tiệm cận đứng tại $Q(-1; y_Q)$. Khi đó:

$$\frac{-2}{(x_0 + 1)^2}(-1 - x_0) + \frac{x_0 + 3}{x_0 + 1} = y_Q$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2x_0 + x_0^2 + 4x_0 + 3 = y_Q(x_0 + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + 6x_0 + 5 = y_Q(x_0 + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 1)(x_0 + 5) = y_Q(x_0 + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow y_Q = \frac{x_0 + 5}{x_0 + 1}.$$

$$\Rightarrow Q\left(-1; \frac{x_0 + 5}{x_0 + 1}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_P + x_Q = 2x_0 + 1 - 1 = 2x_0 = 2x_S \\ y_P + y_Q = 1 + \frac{x_0 + 5}{x_0 + 1} = \frac{2x_0 + 6}{x_0 + 1} = \frac{2(x_0 + 3)}{x_0 + 1} = 2y_0 = 2y_S. \end{cases}$$

Vậy S là trung điểm của PQ .