

GIẢI TOÁN LỚP 12: ĐÁP ÁN BÀI 2 TRANG 43 SGK GIẢI TÍCH

Đề bài

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số bậc bốn sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = -x^4 + 8x^2 - 1; & \text{b) } y = x^4 - 2x^2 + 2; \\ \text{c) } y = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{3}{2}; & \text{d) } y = -2x^2 - x^4 + 3. \end{array}$$

Hướng dẫn giải

Các bước khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

Bước 1: Tìm TXĐ của hàm số.

Bước 2: Khảo sát sự biến thiên:

*) Xét chiều biến thiên của hàm số:

+) Tính đạo hàm.

+) Tìm các điểm X_i mà tại đó đạo hàm có $y' = 0$ hoặc đạo hàm không xác định.

+) Xét dấu đạo hàm y' và suy ra chiều biến thiên của hàm số.

*) Tìm cực trị: $y(X_i)$.

*) Tìm các giới hạn vô cực, các giới hạn có kết quả là vô cực và tiệm cận của đồ thị hàm số nếu có.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y; \lim_{x \rightarrow -\infty} y; \dots$$

*) Lập bảng biến thiên: Thể hiện đầy đủ và chính xác các giá trị trên bảng biến thiên.

Bước 3: Đồ thị:

+) Giao điểm của đồ thị với trục tung: $X_i = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow A(0; \dots)$.

+) Giao điểm của đồ thị với trục hoành: $y = 0 \Rightarrow x = \dots \Rightarrow B(\dots; 0)$.

+) Các điểm cực đại, cực tiểu nếu có.

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$;

Sự biến thiên:

Ta có: $y' = -4x^3 + 16x = -4x(x^2 - 4)$;

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow -4x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$; nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$ và $2; +\infty$.

- Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại hai điểm $x = -2$ và $x = 2$; $y_{CD} = y(\pm 2) = 15$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$; $y_{CT} = -1$

- Giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -\infty$$

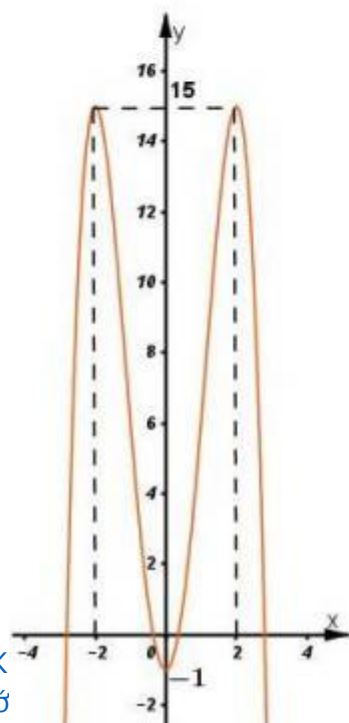
Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	0	-
y			15		15			
	$-\infty$			1			$-\infty$	

Đồ thị giao Oy tại điểm $(0; -1)$

Hàm số đã cho là hàm số chẵn nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Đồ thị



b) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$;

Sự biến thiên:

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$.

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

- Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$; $y_{CD} = 2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại hai điểm $x = -1$ và $x = 1$; $y_{CT} = y(\pm 1) = 1$.

-Giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			2				$+\infty$

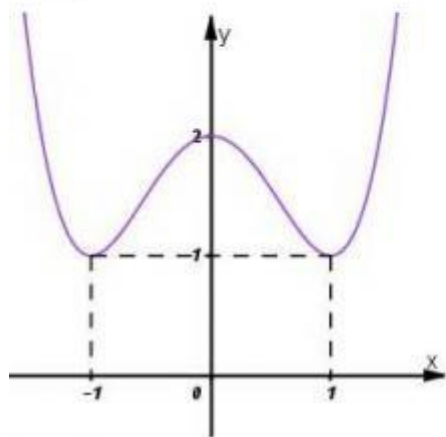
Diagram illustrating the behavior of the function y as x approaches the boundaries of the intervals defined by the critical points $x = -1, 0, 1$. The function values are indicated by arrows pointing to the corresponding y values:

- As $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow +\infty$.
- As $x \rightarrow -1^-$, $y \rightarrow 1$.
- As $x \rightarrow -1^+$, $y \rightarrow 2$.
- As $x \rightarrow 0^-$, $y \rightarrow 2$.
- As $x \rightarrow 0^+$, $y \rightarrow 1$.
- As $x \rightarrow 1^-$, $y \rightarrow 1$.
- As $x \rightarrow 1^+$, $y \rightarrow 2$.
- As $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$.

Hàm số đã cho là hàm số chẵn nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Đồ thị giao Oy tại điểm $(0; 2)$

Đồ thị



c) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$;

Sự biến thiên:

Ta có: $y' = 2x^3 + 2x = 2x(x^2 + 1)$;

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$; đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

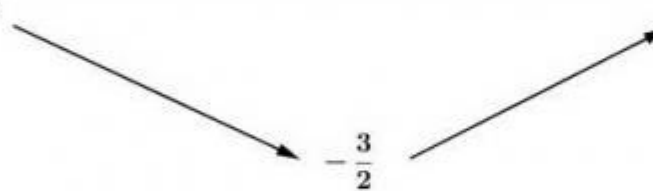
-Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$; $y_{CT} = -\frac{3}{2}$

-Giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$$

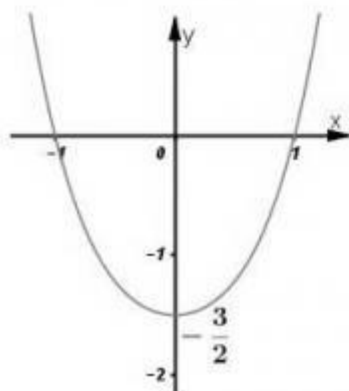
Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				$+\infty$
			$-\frac{3}{2}$		

Hàm số đã cho là hàm số chẵn, nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Đồ thị giao Ox tại hai điểm $(-1; 0)$ và $(1; 0)$; giao Oy tại $(0; -\frac{3}{2})$.

Đồ thị như hình bên.



d) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$;

Sự biến thiên:

Ta có: $y' = -4x - 4x^3 = -4x(1 + x^2)$;

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow -4x(1 + x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

- Hàm số đồng biến trên khoảng: $(-\infty; 0)$; nghịch biến trên khoảng: $(0; +\infty)$.

- Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$; $y_{CD} = 3$.

- Giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -\infty$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$		3		$-\infty$

Hàm số đã cho là hàm chẵn, nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Đồ thị giao Ox tại hai điểm $(1; 0)$ và $(-1; 0)$; giao Oy tại điểm $(0; 3)$.

Đồ thị như hình bên.

