GIẢI BÀI 1 TRANG 43 SÁCH GIÁO KHOA GIẢI TÍCH LỚP 12

Đề bài

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số bậc ba sau:

a) $y = 2 + 3x - x^3$; b) $y = x^3 + 4x^2 + 4x$;

c) $y = x^3 + x^2 + 9x$; d) $y = -2x^3 + 5$;

Hướng dẫn giải

Các bước khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

Bước 1: Tìm TXĐ của hàm số.

Bước 2: Khảo sát sự biến thiên:

*) Xét chiều biến thiên của hàm số:

+) Tính đạo hàm.

+) Tìm các điểm x_i mà tại đó đạo hàm có $y' = 0$ hoặc đạo hàm không xác định.

+) Xét dấu đạo hàm y' và suy ra chiều biến thiên của hàm số.

*) Tìm cực trị: $y(x_i)$.

*) Tìm các giới hạn vô cực, các giới hạn có kết quả là vô cực và tiệm cận của đồ thị hàm số nếu có.

$\lim_{x\to\pm\infty} y$; $\lim_{x\to x_0} y \ldots$

*) Lập bảng biến thiên: Thể hiện đầy đủ và chính xác các giá trị trên bảng biến thiên.

Bước 3: Đồ thị:

+) Giao điểm của đồ thị với trục tung: $x = 0 \Rightarrow y = \ldots \Rightarrow A(0; \ldots)$.

+) Giao điểm của đồ thị với trục hoành: $y = 0 \Rightarrow x = \ldots \Rightarrow B(\ldots; 0)$.

Đáp án bài 1 trang 43 sgk giải tích lớp 12

a) $y = 2 + 3x - x^3$.

1) TXĐ: $D = R$.

2) Sự biến thiên:

+) Chiều biến thiên:

Ta có: $y' = 3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Trên khoảng $(-1;\ 1)$, $y' > 0$ nên hàm số số đồng biến, trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$ có $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến.

+) Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 1;\ y_{CD} = y(1) = 4$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1;\ \ y_{CT} = y(-1) = 0$.

+) Giới hạn vô cực: $\lim_{x\to-\infty} y = +\infty;\ \ \lim_{x\to+\infty} y = -\infty$.

+) Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

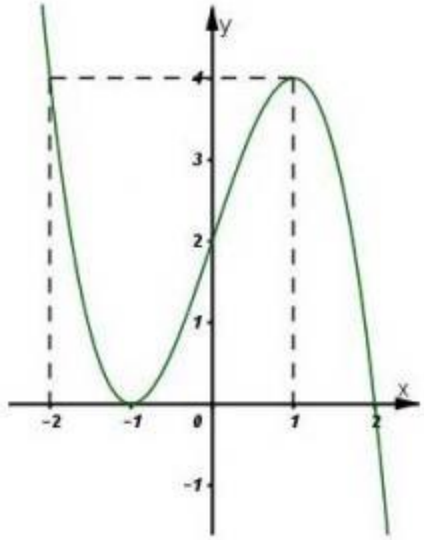
+) Đồ thị:

Ta có: $2 + 3x - x^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Vậy đồ thị hàm số giao với trục hoành tại 2 điểm $(2;\ 0)$ và $(-1;\ 0)$.

Ta có: $y'' = 6x$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Với $x = 0$ ta có $y = 2$. Vậy đồ thị hàm số nhận điểm $I(0; 2)$ làm tâm đối xứng.

Nhận thấy, nhánh bên trái vẫn còn thiếu một điểm để vẽ đồ thị, dựa vào tính đối xứng ta chọn điểm của hoành độ $x = -2$ suy ra $y = 4$.



Câu b:

Xét hàm số $y = x^3 + 4x^2 + 4x$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Sự biến thiên:

Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 8x + 4$.

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ và nghịch biến trên $\left(-2; -\frac{2}{3}\right)$.

Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$, giá trị cực đại $y_{cđ} = y(-2) = 0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\frac{2}{3}$, giá trị cực tiểu $y_{ct} = y\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{32}{27}$.

Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

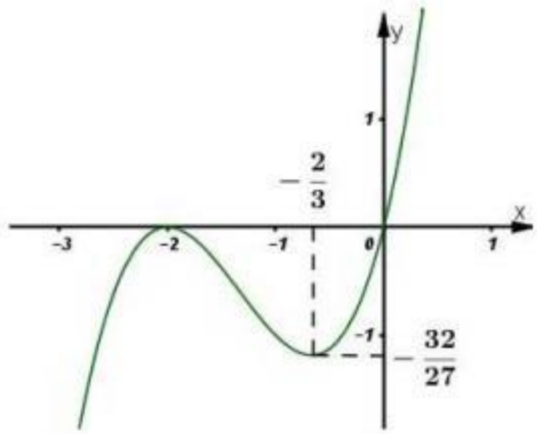
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\frac{32}{27}$	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0;0)$, cắt trục Ox tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình: $x^3+4x^2+4x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-2$ nên tọa độ các giao điểm là $(0;0)$ và $(-2;0)$.

Đồ thị hàm số:

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số: $y''=6x+8; \Rightarrow y''=0 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3} \Rightarrow y=-\frac{16}{27}$.



Câu c:

Xét hàm số $y = x^3 + x^2 + 9x$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}.$

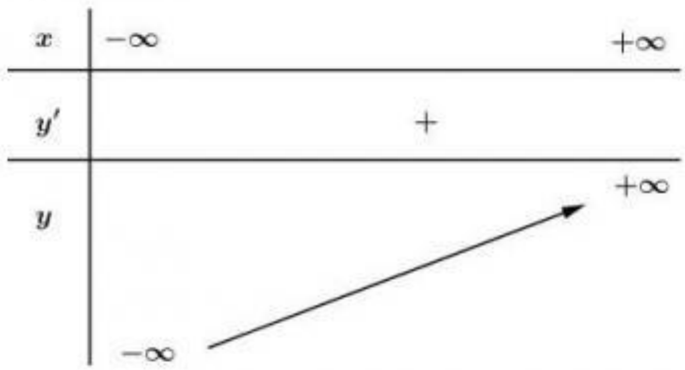
Sự biến thiên:

Đạo hàm:
$y' = 3x^2 + 2x + 9 = 2x^2 + (x^2 + 2x + 1) + 8$
$= 2x^2 + (x + 1)^2 + 8 > 0, \forall x.$

Vậy hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ và không có cực trị.

Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty;\ \lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty.$

Bảng biến thiên :

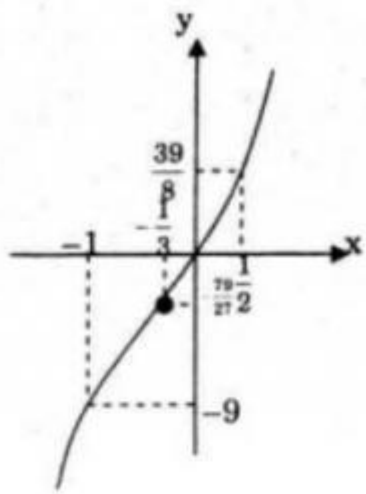


Đồ thị:

Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại điểm $(0; 0)$, cắt trục Oy tại điểm $(0; 0)$.

Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$. Suy ra tọa độ tâm đối xứng là: $I\left(-\frac{1}{3}; -\frac{79}{27}\right)$.

Lúc này ta vẫn chưa có đủ điểm để vẽ đồ thị hàm số, ta cần lấy thêm hai điểm có hoành độ cách đều hoành độ x_1 và x_2 sao cho $\left|x_1 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right| = \left|x_2 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right|$, khi đó hai điểm này sẽ đối xứng nhau qua điểm uốn. Ta chọn các điểm $(-1; -9)$ và $\left(\frac{1}{2}; \frac{39}{8}\right)$.



Câu d:

Xét hàm số $y = -2x^3 + 5$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Sự biến thiên:

Đạo hàm: $y' = -6x^2 \le 0, \forall x$.

Vậy hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số không có cực trị.

Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	5	↘	$-\infty$

Đồ thị:

Tính đối xứng: $y'' = -12x; y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Vậy đồ thị hàm số nhận điểm uốn $I(0;5)$ làm tâm đối xứng.

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0;5)$, đồ thị cắt trục Ox tại điểm $\left(\sqrt[3]{\frac{5}{2}};0\right)$.