

ĐÁP ÁN BÀI 3 TRANG 18 SÁCH GIÁO KHOA GIẢI TÍCH 12

Đề bài.

Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{|x|}$ không có đạo hàm tại $x = 0$ nhưng vẫn đạt cực tiểu tại điểm đó.

Hướng dẫn giải.

*) Để chứng minh hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = 0$ ta sử dụng cách tính đạo hàm tại một điểm bằng định nghĩa:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ (nếu tồn tại giới hạn).}$$

*) Để chứng minh hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ ta sử dụng định nghĩa cực trị:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (có thể a là $-\infty$ và b là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

a) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 .

b) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 .

ĐÁP ÁN BÀI 3 TRANG 18 SGK GIẢI TÍCH LỚP 12

*) Chứng minh hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = 0$:

$$y = f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{khi } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{-(\sqrt{-x})^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sqrt{-x}} = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$\Rightarrow$ Không tồn tại đạo hàm của hàm số đã cho tại $x = 0$.

*) Chứng minh hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$:

Với $h > 0$ là một số thực bất kì ta có:

$$f(x) = \sqrt{|x|} \geq 0 \quad \forall x \in (-h; h)$$

$$f(0) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(0) \quad \forall x \in (-h; h)$$

Theo định nghĩa điểm cực trị của hàm số ta kết luận $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x) = \sqrt{|x|}$.