Đề bài:

Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\left(\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right).\left(\dfrac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2=1$ với $a\geq 0$ và $a\neq 1$

b) $\dfrac{a+b}{b^2}\sqrt{\dfrac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}}=|a|$ với $a+b>0$ và $b\neq 0$

Đáp án:

a) *Biến đổi vế trái để được vế phải*

Ta có:

$$\begin{aligned}
VT&=\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right).\left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2\\
&=\left(\frac{1-(\sqrt{a})^3}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right).\left(\frac{1-\sqrt{a}}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}\right)^2\\
&=\left(\frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a}+(\sqrt{a})^2)}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right).\left(\frac{1}{1+\sqrt{a}}\right)^2\\
&=\left[(1+\sqrt{a}+(\sqrt{a})^2)+\sqrt{a}\right].\frac{1}{(1+\sqrt{a})^2}\\
&=\left[(1+2\sqrt{a}+(\sqrt{a})^2)\right].\frac{1}{(1+\sqrt{a})^2}\\
&=(1+\sqrt{a})^2.\frac{1}{(1+\sqrt{a})^2}=1=VP.
\end{aligned}$$

b) Ta có:

$$VT = \frac{a+b}{b^2}\sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}}$$

$$= \frac{a+b}{b^2}\sqrt{\frac{(ab^2)^2}{(a+b)^2}}$$

$$= \frac{a+b}{b^2}\frac{\sqrt{(ab^2)^2}}{\sqrt{(a+b)^2}}$$

$$= \frac{a+b}{b^2}\frac{|ab^2|}{|a+b|}$$

$$= \frac{a+b}{b^2}.\frac{|a|b^2}{a+b} = |a| = VP$$

Vì $a+b>0 \Rightarrow |a+b| = a+b$.