Đáp án đề thi môn Toán chuyên lớp 10 tỉnh Lai Châu 2017/18

Tham khảo đề thi môn Toán vào lớp 10 chuyên năm học 2017/2018 tỉnh Lai Châu. Đề thi Toán chuyên có thời gian làm bài 120 phút.

Lời giải đáp án do giáo viên Đỗ Văn Lâm - GV THCS TT Tân Uyên Lai Châu thực hiện.

I. Đề Thi

UBND TỈNH LAI CHÂU
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CẤP THPT
NĂM HỌC 2017-2018

Môn thi: Toán - Đề chuyên
Thời gian: 120 phút *(không kể thời gian phát đề)*
Ngày thi: 14/6/2017

Câu 1. (***2,0 điểm***): Cho biểu thức: $A=\dfrac{3x+3\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$

1. Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A;
2. Tìm x nguyên để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (***2,0 điểm***):

1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+xy-2y+3=0 \\ y^2+xy-3x-y-1=0 \end{cases}$

2. Trong 4 đồng tiền có 3 đồng tiền thật có khối lượng như nhau và một đồng tiền giả có khối lượng khác. Làm thế nào để tìm được đồng tiền giả bằng hai lần cân (cân thăng bằng hai đĩa, không có quả cân).

Câu 3. (***1,5 điểm***):

Cho phương trình: $(3m-1)x^2+2(m+1)x-m+2=0$ (m là tham số) (1)

1. Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi m;
2. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào tham số m.

Câu 4. (***3,5 điểm***):

Cho đường tròn (O) và điểm A cố định nằm ngoài (O). Kẻ tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B,C là hai tiếp điểm). Gọi M là một điểm thuộc cung nhỏ BC (M khác B và C). Đường thẳng AM cắt (O) tại điểm thứ hai là N. Gọi E là trung điểm của MN.

1. Chứng minh bốn điểm A,B,O,E thuộc một đường tròn;
2. Chứng minh: $2\widehat{BNC}+\widehat{BAC}=180^0$;
3. Chứng minh: $AC^2=AM.AN$ và $MN^2=4(AE^2-AC^2)$;
4. Gọi I,J là hình chiếu của M lên cạnh AB và AC. Xác định vị trí của M sao cho tích $MI.MJ$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5. (***1,0 điểm***):

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn abc = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(ab+2)(2ab+1)}+\frac{b^2}{(bc+2)(2bc+1)}+\frac{c^2}{(ac+2)(2ac+1)}\geq\frac{1}{3}$$

…………………Hết…………………

- Thí sinh không sử dụng tài liệu

Đỗ Văn Lâm - Giáo viên trường THCS TT Tân Uyên-LC

II. Đáp Án

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN

Chú ý: Đáp án chỉ mang tính tham khảo

Câu 1. ***(2,0 điểm)***: Cho biểu thức: $A = \dfrac{3x+3\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$

1. Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A
2. Tìm x nguyên để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Giải

1. ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 1$. Khi đó:

$$A = \frac{3x+3\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} = \frac{3x+3\sqrt{x}-3-(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{x+\sqrt{x}-2}$$

$$= \frac{3x+3\sqrt{x}-3-x+1-x+4}{x+\sqrt{x}-2} = \frac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

2. $A = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{x}-1} \in Z \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \in Z \\ \sqrt{x}-1 \in \{\pm 1; \pm 2\} \end{cases} \Rightarrow x \in \{0;4;9\}$

Câu 2. ***(2,0 điểm)***:

1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+xy-2y+3=0 \\ y^2+xy-3x-y-1=0 \end{cases}$

2. Trong 4 đồng tiền có 3 đồng tiền thật có khối lượng như nhau và một đồng tiền giả có khối lượng khác. Làm thế nào để tìm được đồng tiền giả bằng hai lần cân (cân thăng bằng hai đĩa, không có quả cân).

Giải

1. $\begin{cases} x^2+xy-2y+3=0 \\ y^2+xy-3x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow (x+y)^2-3(x+y)+2=0 \Leftrightarrow (x+y-1)(x+y-2)=0$

TH1: $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+xy-2y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-2y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1/3 \\ y=4/3 \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+xy-2y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 2x-2y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1/4 \\ y=7/4 \end{cases}$

Vậy hệ có hai nghiệm: $(x, y) \in \left\{\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right), \left(\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)\right\}$

2. Ta đánh số bốn đồng xu lần lượt là: X1; X2; X3; X4 sau đó bỏ 2 đồng xu X1, X2 lên cân thì có thể chúng cân bằng nhau hoặc không cân bằng nhau nên ta xét:

Cân lần 1:

TH1: Nếu X1; X2 cân bằng nhau thì chắc chắn X1 và X2 là hai đồng tiền thật chuyển sang cân lần 2. Cân X1(tiền thật) và X3 nếu chúng cân bằng nhau thì chắn chắn X4 là tiền giả, nếu không cân bằng nhau thì chắc chắn X3 là tiền giả.

TH2: Nếu X1 và X2 không cân bằng nhau thì chắc chắn X3 và X4 là tiền thật chuyển sang cân lần 2. Cân X1 và X3(tiền thật) nếu chúng cân bằng nhau thì chắc chắn X2 là tiền giả, nếu chúng không cân bằng nhau thì X1 là tiền giả.

Câu 3. ***(1,5 điểm)***: Cho phương trình: $(3m-1)x^2+2(m+1)x-m+2=0$ (*m* là tham số) (1)

1. Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi *m*;
2. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào tham số *m*.

Giải

1. - Nếu 3m - 1 = 0 $\Leftrightarrow$ m = 1/3 thì (1) có dạng: 8x - 5 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 5/8 (t/m)

- Nếu 3m - 1 $\neq 0 \Leftrightarrow$ $m \neq 1/3$. Khi đó $\Delta' = (m+1)^2 - (3m-1)(2-m) = 4m^2 - 5m + 3$

$\Rightarrow \Delta' = \left(2m - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{16} > 0 \Rightarrow$ Phương trình cũng có nghiệm với mọi *m*

Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi *m*

2. Để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thì $m \neq \frac{1}{3}$. Khi đó theo hệ thức Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-2(m+1)}{3m-1} \\ x_1.x_2 = \dfrac{-m+2}{3m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x_1 + x_2) = \dfrac{-10(m+1)}{3m-1} \\ 8x_1.x_2 = \dfrac{-8m+16}{3m-1} \end{cases} \Rightarrow 5(x_1 + x_2) + 8x_1x_2 = -6$$

Vậy hệ thức giữa hai nghiệm độc lập m là: $5(x_1 + x_2) + 8x_1x_2 = -6$

Câu 4. (*3,5 điểm*): Cho đường tròn (O) và điểm A cố định nằm ngoài (O). Kẻ tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là hai tiếp điểm). Gọi M là một điểm thuộc cung nhỏ BC (M khác B và C). Đường thẳng AM cắt (O) tại điểm thứ hai là N. Gọi E là trung điểm của MN.

1. Chứng minh bốn điểm A, B, O, E thuộc một đường tròn;

2. Chứng minh: $2\widehat{BNC} + \widehat{BAC} = 180^0$;

3. Chứng minh: $AC^2 = AM.AN$ và $MN^2 = 4(AE^2 - AC^2)$;

4. Gọi I, J là hình chiếu của M lên cạnh AB và AC. Xác định vị trí của M sao cho tích $MI.MJ$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải

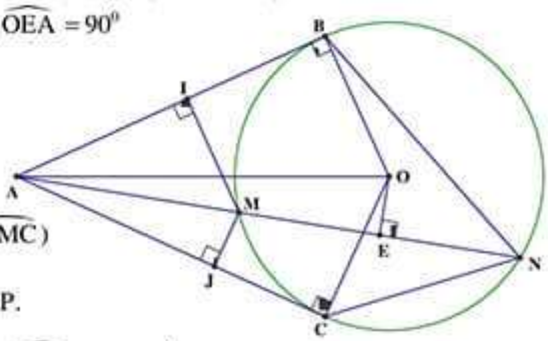
1. - Vì AB $\perp$ BO(t/c tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{ABO} = 90^0 \Rightarrow$ B thuộc đường tròn đường kính AO (1)

- Vì E là trung điểm của dây MN $\Rightarrow$ OE $\perp$ MN $\Rightarrow \widehat{OEA} = 90^0$

$\Rightarrow$ E thuộc đường tròn đường kính AO (2)

- Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ A, B, O, E thuộc đường tròn đường kính AO.

(hoặc chỉ ra: $+ \hat{E} = 180^0$)



2. Vì AB, AC là hai tiếp tuyến của (O) nên:

$VT = 2\widehat{BNC} + \widehat{BAC} = sd\,\overset{\frown}{BMC} + \frac{1}{2}(sd\,\overset{\frown}{BNC} - sd\,\overset{\frown}{BMC})$

$= \frac{1}{2}(sd\,\overset{\frown}{BNC} + sd\,\overset{\frown}{BMC}) = \frac{1}{2}.360^0 = 180^0 = VP.$

3. +) Xét ΔAMC và ΔACN có $\hat{A}$ chung; $\widehat{ACM} = \widehat{ANC}$ (cùng chắn cung MC)

$\Rightarrow \Delta AMC \backsim \Delta ACN \Rightarrow \frac{AC}{AN} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow AC^2 = AM.AN$

+) Ta có: $ME^2 + EO^2 = MO^2$ (pitago) $\Rightarrow ME^2 = R^2 - EO^2$

$\Rightarrow \left(\frac{MN}{2}\right)^2 = OC^2 - EO^2 \Rightarrow MN^2 = 4\left[(AO^2 - AC^2) - (AO^2 - AE^2)\right] \Rightarrow MN^2 = 4\left(AE^2 - AC^2\right)$

4. Áp dụng bất đẳng thức Cosi: $MI.MJ \leq \left(\frac{MI + MJ}{2}\right)^2$. Dấu "=" xảy ra khi MI = MJ $\Rightarrow$ M thuộc tia phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow M \in AO \Rightarrow$ M là điểm chính giữa của cung nhỏ BC.

Câu 5. (*1,0 điểm*):

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn abc = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(ab+2)(2ab+1)}+\frac{b^2}{(bc+2)(2bc+1)}+\frac{c^2}{(ac+2)(2ac+1)}\geq\frac{1}{3}$$

Giải

Trước hết ta chứng minh ba bất đẳng thức phụ sau:

-) Theo BĐT Cosi: $(ab+2bc)(2ab+bc)\leq\left(\frac{(ab+2bc)+(2ab+bc)}{2}\right)^2=\frac{9}{4}(ab+bc)^2$

-) Theo BĐT Bunhiacopxki: $(ab+bc)^2\leq 2(a^2b^2+b^2c^2)$

-) Chứng minh: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$. (Với a, b, c > 0)

Thật vậy: Đặt $b+c=x, c+a=y, a+b=z\Rightarrow a=\frac{y+z-x}{2}$; $b=\frac{z+x-y}{2}$, $c=\frac{x+y-z}{2}$

$$\Rightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\right]-\frac{3}{2}\geq\frac{1}{2}(2+2+2)-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

Vì abc = 1 nên ta đặt $a=\frac{x}{y}$; $b=\frac{y}{z}$; $c=\frac{z}{x}$ (với x, y, z > 0). Khi đó:

+) $$\frac{a^2}{(ab+2)(2ab+1)}=\frac{\frac{x^2}{y^2}}{\left(\frac{x}{y}.\frac{y}{z}+2\right)\left(2\frac{x}{y}.\frac{y}{z}+1\right)}=\frac{x^2z^2}{(xy+2yz)(2xy+yz)}\geq\frac{4x^2z^2}{9(xy+yz)^2}\geq\frac{2x^2z^2}{9(x^2y^2+y^2z^2)}$$

+) Tương tự: $\frac{b^2}{(bc+2)(2bc+1)}\geq\frac{2x^2y^2}{9(y^2z^2+z^2x^2)}$; $\frac{c^2}{(ac+2)(2ac+1)}\geq\frac{2y^2z^2}{9(z^2x^2+x^2y^2)}$

$$\Rightarrow VT\geq\frac{2}{9}\left(\frac{x^2z^2}{x^2y^2+y^2z^2}+\frac{x^2y^2}{y^2z^2+x^2z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2z^2+x^2y^2}\right)\geq\frac{2}{9}.\frac{3}{2}=\frac{1}{3}$$

Đỗ Văn Lâm - Giáo viên trường THCS TT Tân Uyên-LC