



**Bài 1 (2 điểm).**

Cho biểu thức  $A = \frac{3\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{3\sqrt{x}+1} + \frac{8\sqrt{x}}{9x-1}$  với  $x > 0; x \neq \frac{1}{9}$

- 1) Tính giá trị của biểu thức A tại  $x = 4$ .
- 2) Rút gọn biểu thức  $P = A.B$ .
- 3) Tìm x nguyên sao cho biểu thức  $\frac{1}{P}$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

**Bài 2 (2 điểm). Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình**

Chiều dài của bể bơi là 120m. Trong một đợt tập bơi phòng chống đuối nước ở một trường THCS, mỗi học sinh phải thực hiện bài tập bơi từ đầu này sang đầu kia của bể bơi theo vận tốc quy định. Sau khi bơi được  $\frac{1}{2}$  quãng đường đầu, học sinh A giảm vận tốc 1m/s so với vận tốc quy định trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc theo quy định biết học sinh A về đến đầu kia của bể bơi chậm hơn quy định là 10 giây.

**Bài 3 (2 điểm).**

1) Giải hệ phương trình sau: 
$$\begin{cases} 5\sqrt{x+1} - \frac{4}{y^2+1} = 8 \\ 3\sqrt{x+1} + \frac{2}{y^2+1} = 7 \end{cases}$$

- 2) Cho phương trình  $x^2 - 6x + 2m + 1 = 0$  (1)
  - a) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu.
  - b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn:  $x_1^2 = x_2$  4

**Bài 4 (3,5 điểm).** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O ( $AB < AC$ ), đường kính AD. Đường cao BE, CP, AQ cắt nhau tại H.

- a) Chứng minh rằng tứ giác APHE nội tiếp.
- b) So sánh  $\widehat{BAH}$  và  $\widehat{OAC}$
- c) Gọi I là trung điểm của BC, G là giao điểm của AI và OH. Chứng minh rằng G là trọng tâm  $\Delta ABC$ .
- d) Tìm điều kiện của tam giác ABC để  $OH \parallel BC$

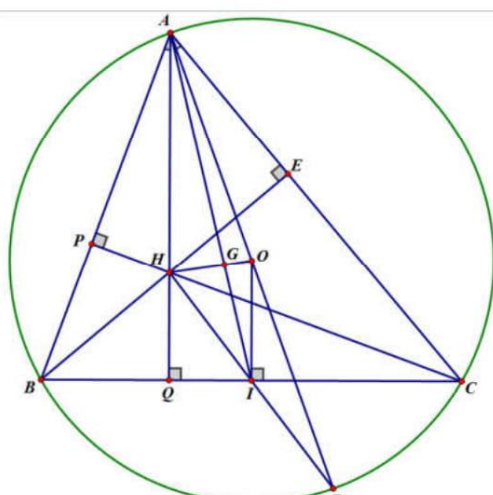
**Bài 5 (0,5 điểm).** Cho a, b là các số thực không âm thỏa mãn:  $a + b \leq 1$ .

Chứng minh rằng:  $a^2b^2(a^2 + b^2) \leq \frac{1}{32}$

--- HẾT ---

## HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI	Ý	HƯỚNG DẪN GIẢI	ĐIỂM
<b>1</b>			<i>(2đ)</i>
	<b>a</b>	<b>Tính giá trị biểu thức A s</b>	<i>(0,5đ)</i>
		$x = 4 \text{ (TM)} \Rightarrow \sqrt{x} = 2$ . Thay vào A $A = \frac{3.2 + 1}{4 + 2} = \frac{7}{6}$ Vậy $A = \frac{7}{6}$ khi $x = 4$	 <i>0.25</i> <i>0.25</i>
	<b>b</b>	<b>Rút gọn P = A.B</b>	<i>(1đ)</i>
		$B = \frac{3x + 3\sqrt{x}}{(3\sqrt{x} - 1)(3\sqrt{x} + 1)}$	<i>0.5</i>
		$P = A.B = \frac{3}{3\sqrt{x} - 1}$	<i>0.5</i>
	<b>c</b>	Tìm x nguyên sao cho biểu thức $\frac{1}{P}$ đạt giá trị nhỏ nhất	<i>(0,5đ)</i>
		$\frac{1}{P} = \sqrt{x} - \frac{1}{3}$ Vì $x > 0$ và x nguyên $\Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{3} \geq \frac{2}{3}$	<i>0.25</i>
		Min $\frac{1}{P} = \frac{2}{3}$ . Dấu “=” xảy ra khi $x = 1$ (tm)	<i>0.25</i>
<b>2. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình</b>			<i>(2đ)</i>
		Gọi vận tốc bơi của học sinh theo quy định là x (m/s, $x > 1$ )	<i>0.25</i>
		Thời gian dự định bơi cả bể là $\frac{120}{x}$ (giây) Nửa bể dài $\frac{1}{2} = 60$ m Thực tế, thời gian bơi $\frac{1}{2}$ bể đầu là $\frac{60}{x}$ (giây) Vận tốc bơi khi giảm 1 m/s là $x-1$ (m/s) Thời gian bơi $\frac{1}{2}$ bể sau là $\frac{60}{x-1}$ (giây) Vì đến chậm hơn quy định 10 giây nên ta có phương trình: $\left(\frac{60}{x} + \frac{60}{x-1}\right) - \frac{120}{x} = 10$	<i>1</i>
		$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$ $\Leftrightarrow x = 3$ (tm)	<i>0.5</i>
		Vậy vận tốc bơi của học sinh theo quy định là 3 m/s	<i>0.25</i>
<b>3</b>			<i>(2đ)</i>
	<b>1</b>		<i>1đ</i>
		Đk: $x \geq 1$	<i>0.25</i>
		Đặt $\sqrt{x+1} = a; \frac{1}{y^2+1} = b$ ĐK: $a \geq 0$	<i>0.25</i>

	Giải hệ phương trình $\Rightarrow \begin{cases} a = 2(TM) \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$	0.25
	Thay vào $\Rightarrow \begin{cases} x = 3(TM) \\ y = \pm 1 \end{cases}$ Vậy nghiệm của hệ phương trình là (3; 1) và (3; -1)	0.25
<b>2</b>		<b>1đ</b>
<b>a</b>	Đề phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0 \Leftrightarrow m < \frac{-1}{2}$	0.5
<b>b</b>	Đề phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow \Delta' = 8 - 2m > 0 \Rightarrow m < 4$ Theo hệ thức Vi ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m + 1 & (2) \end{cases}$ Theo đề bài: $x_1^2 = x_2 - 4 \Rightarrow x_2 = x_1^2 + 4$ (3) Từ (1) và (3) $\Rightarrow x_1^2 + x_1 - 2 = 0$ $\Rightarrow x_1 = 1$ hoặc $x_1 = -2$	0.25
	TH1: $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 5$ . Thay vào (2) $\Rightarrow m = 2$ (TM) TH2: $x_1 = -2 \Rightarrow x_2 = 8$ . Thay vào (2) $\Rightarrow m = \frac{-17}{2}$ (TM) Vậy $m = 2$ hoặc $m = \frac{-17}{2}$	0.25
<b>4</b>		<b>(3,5đ)</b>
		0.25
<b>a</b>	$\widehat{APH} + \widehat{AEH} = 180^\circ \Rightarrow$ tg APHE nội tiếp	0.75
<b>b</b>	CM: $\widehat{ACD} = 90^\circ$ CM: $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ $\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{OAC}$	0.25 0.25 0.5
<b>c</b>	CM: tg BHCD là hbh $\Rightarrow$ I là trung điểm HD CM: OI là đường trung bình tam giác AHD $\Rightarrow AH \parallel OI; AH = 2OI$ $\Delta AHG$ đồng dạng $\Delta IOG \Rightarrow GA = 2GI$ $\Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác ABC	0.25 0.25 0.25 0.25

	<p>CM tứ giác HQIO là hình chữ nhật <math>\Rightarrow AH = 2HQ \Rightarrow AQ = 3.QH</math>  <math>\Delta QAC</math> đồng dạng <math>\Delta QBH \Rightarrow QA.QH = QB.QC</math>  <math>\Rightarrow \frac{1}{3}QA^2 = QB.QC</math>  <math>\Rightarrow \frac{QA}{QC} \cdot \frac{QA}{QB} = 3</math>  <math>\Rightarrow \tan B \cdot \tan C = 3</math>  <math>\Rightarrow</math> Tam giác ABC có <math>\tan B \cdot \tan C = 3</math> thì <math>OH \parallel BC</math></p>	<p><b>0.25</b></p> <p><b>0.25</b></p>
<p><b>5</b></p>	<p>- Do <math>x, y \geq 0 \Rightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow (x + y)^2 \geq 4xy \Rightarrow xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}</math> (1)  - Ta có: <math>a^2b^2(a^2 + b^2) = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot [2ab \cdot (a^2 + b^2)]</math>  - Áp dụng BĐT (1)  <math display="block">a^2b^2(a^2 + b^2) \leq \frac{1}{2} \frac{(a+b)^2}{4} \cdot \frac{[(2ab) + (a^2 + b^2)]^2}{4}</math> <math display="block">\Rightarrow a^2b^2(a^2 + b^2) \leq \frac{1}{2} \frac{(a+b)^2}{4} \cdot \frac{[(a+b)^2]^2}{4} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(1)^2}{4} \cdot \frac{(1^2)^2}{4} \leq \frac{1}{32}</math></p>	<p><b>0.25</b></p> <p><b>0.25</b></p>