

Giải toán 12 trang 10 bài 5 giải tích lớp 12 lời giải SGK

Đề bài

Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\tan x > x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$.

b) $\tan x > x + \frac{x^3}{3} \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$.

Phương pháp giải - Xem chi tiết

+ Chuyển về tất cả các biểu thức chứa biến sang về trái sau đó so sánh hàm số $y(x)$ với 0.

+ Tính đạo hàm bậc nhất của hàm số $y(x)$ và khảo sát hàm số $y(x)$ trên các khoảng đề bài đã cho.

+ Dựa vào tính đơn điệu của hàm số để kết luận bài toán.

Lời giải chi tiết

a) $\tan x > x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$.

Xét hàm số: $y = f(x) = \tan x - x$ với $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Ta có: $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x > 0 \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$

Vậy hàm số luôn đồng biến trên $(0; \frac{\pi}{2})$.

$\Rightarrow \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$ ta có $f(x) > f(0)$

$\Leftrightarrow \tan x - x > \tan 0 - 0$

$\Leftrightarrow \tan x - x > 0$

$\Leftrightarrow \tan x > x$ (dpcm).

b) $\tan x > x + \frac{x^3}{3} \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$.

Xét hàm số: $y = g(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$ với $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Ta có:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = 1 + \tan^2 x - 1 - x^2$$

$$= \tan^2 x - x^2 = (\tan x - x)(\tan x + x).$$

Với $\forall x \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \tan x > 0$ nên ta có: $\tan x + x > 0$ và $\tan x - x > 0$ (theo câu a)

$\Rightarrow y' > 0 \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$

Vậy hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên $(0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow g(x) > g(0)$.

$\Leftrightarrow \tan x - x - \frac{x^3}{3} > \tan 0 - 0 - 0$

$\Leftrightarrow \tan x - x - \frac{x^3}{3} > 0$

$\Leftrightarrow \tan x > x + \frac{x^3}{3}$ (dpcm).