Đề tuyển sinh vào lớp 10 môn toán năm học 2017-2018

<u>Cấu trúc đề thi:</u>

Câu 1. Giải phương trình - hệ phương trình.

Câu 2. Số nguyên - số chính phương

Câu 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Câu 4. Hình học - đường tròn.

Câu 5: Nâng cao

Đề tuyển sinh vào lớp 10 môn toán năm học 2017-2018

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2017 – 2018
Môn thi: **TOÁN** ***(chuyên Tin)***
Ngày thi: 10 tháng 6 năm 2017
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài I (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{5x-x^2}+2x^2-10x+6=0$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+xy=3 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \end{cases}$

Bài II (2,5 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn x + y + z = 2 và $3x^2+2y^2-z^2=13$.

2) Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2=c^2$. Chứng minh ab chia hết cho a + b + c.

3) Tìm tất cả số tự nhiên n thỏa mãn 2n + 1, 3n + 1 là các số chính phương và 2n + 9 là số nguyên tố.

Bài III (1,5 điểm)

Cho các số thực dương a, b, c thay đổi luôn thỏa mãn $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(2b+c+a)^2}+\frac{1}{(2c+a+b)^2}$

Bài IV (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC (với AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là trung điểm của cạnh BC, E là hình chiếu của A trên cạnh BC và H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F.

1) Chứng minh $BC^2 = 4.DA.DF$

2) Tia DH cắt đường tròn (O) tại điểm G. Chứng minh bốn điểm A, G, E và D cùng thuộc một đường tròn.

3) Đường thẳng FE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K. Chứng minh đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác GKE

Bài V (1,0 điểm)

Ta viết lên bảng 99 số tự nhiên liên tiếp 1, 2, 3, ..., 99. Ta thực hiện thao tác sau: Xóa ba số a, b,c bất kì trên bảng rồi lại viết lên bảng số (abc + ab + bc + ca + a + b + c). Tiếp tục thực hiện thao tác trên cho đến khi trên bảng còn lại đúng một số. Tìm số còn lại đó.

Đề tuyển sinh vào lớp 10 môn toán năm học 2017-2018

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (2 điểm)

1) Giải hệ phương trình $\sqrt{5x-x^2}+2x^2-10x+6=0$.

2) Giải hệ phương trình phương trình: $\begin{cases} x+y+xy=3 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải:

1) ĐKXĐ: $0 \le x \le 5$

Ta có pt $\Leftrightarrow \sqrt{x(5-x)}+2x(x-5)+6=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x(5-x)}-2x(5-x)+6=0$$
$$\Leftrightarrow 2x(5-x)-\sqrt{x(5-x)}-6=0$$

Đặt $t=\sqrt{x(5-x)} \ge 0$

Khi đó ta có phương trình: $2t^2-t-6=0$

$$\Leftrightarrow (t-2)(2t+3)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2(tm) \\ t=-\dfrac{3}{2}(ktm) \end{array}\right.$$

$$t=2\Leftrightarrow\sqrt{x(5-x)}=2$$
$$\Leftrightarrow x(5-x)=4$$
$$\Leftrightarrow 5x-x^2=4$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-4)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(tm)\\ x=4(tm)\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{1;4\}$.

2) ĐKXĐ: $x\geq 0;\ y\geq 0$

Ta có hệ: $\begin{cases} x+y+xy=3 & (1)\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 & (2)\end{cases}$

Bình phương 2 vế của phương trình (2) ta được: $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=4\Leftrightarrow x+y+2\sqrt{xy}=4$ (3)

Đặt $\begin{cases} x+y=a\geq 0\\ \sqrt{xy}=b\geq 0\end{cases}$

Khi đó ta có hệ phương trình mới gồm 2 phương trình (1) và (3) là:

$$\begin{cases} a+b^2=3\\ a+2b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a+b^2=3\\ a=4-2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b^2-2b+4-3=0\\ a=4-2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b^2-2b+1=0\\ a=4-2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=1(tm)\\ a=4-2.1=2(tm)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x+y=2\\ \sqrt{xy}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x+y=2\\ xy=1\end{cases}$$

Khi đó hai số $x;\ y$ là hai nghiệm của phương trình: $t^2-2t+1=0\Leftrightarrow(t-1)^2=0\Leftrightarrow t=1$

$\Leftrightarrow x=y=1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(x;y)=(1;1)$.

Đề tuyển sinh vào lớp 10 môn toán năm học 2017-2018

Bài II (2,5 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x+y-z=2$ và $3x^2+2y^2-z^2=13$

Cách 1

Hướng dẫn giải:

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 3x^2+2y^2-z^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x+y-2 & (1) \\ z^2=3x^2+2y^2-13 & (2) \end{cases}$$

Thế (1) vào (2) ta có:

$$\begin{aligned} &(x+y-2)^2=3x^2+2y^2-13 \\ &\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2-4x-4y+4=3x^2+2y^2-13 \\ &\Leftrightarrow 2x^2+y^2-2xy+4x+4y-17=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2-4x+4y+4+x^2+8x+16-37=0 \\ &\Leftrightarrow (y-x+2)^2+(x+4)^2=37 \quad (*) \end{aligned}$$

Ta có: $(y-x+2)^2;(x+4)^2$ là các số chính phương, lại có $x;y;z$ nguyên dương nên:

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (y-x+2)^2=1 \\ (x+4)^2=36 \end{cases} \\ \begin{cases} (y-x+2)^2=36 \\ (x+4)^2=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} (y-x+2)^2=1 \\ (x+4)^2=36 \end{cases} \text{(vì } \begin{cases} (y-x+2)^2=36 \\ (x+4)^2=1 \end{cases} \text{ vô nghiệm khi } x;y;z$$

nguyên dương)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-x+2=1 \\ x+4=6 \end{cases} \\ \begin{cases} y-x+2=-1 \\ x+4=6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-x+2=1 \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} y-x+2=-1 \\ x=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} (tm) \\ \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} (ktm) \end{array}\right.$$

Khi đó: $z=x+y-2=2+1-2=1(tm)$

Vậy $x=2;\ y=1;\ z=1$ thỏa mãn đề bài.

Cách 2

Hướng dẫn giải:

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 3x^2+2y^2-z^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x+y-2 & (1) \\ z^2=3x^2+2y^2-13 & (2) \end{cases}$$

Thế (1) vào (2) ta có:

$$\begin{aligned} & (x+y-2)^2=3x^2+2y^2-13 \\ \Leftrightarrow\ & x^2+2xy+y^2-4x-4y+4=3x^2+2y^2-13 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2+y^2-2xy+4x+4y-17=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(x^2-2xy+y^2\right)+\left(x^2+4x+4\right)+4y-21=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-y)^2+(x+2)^2=21-4y \end{aligned}$$

Vì x, y, z là các số nguyên dương nên $(x-y)^2 \geq 0$ và $(x+2)^2 \geq (1+2)^2=9$

Suy ra $VT \geq 9 \Rightarrow 21-4y \geq 9 \Leftrightarrow 3 \geq y \geq 1$

Với $y=3$ ta có: $2x^2+9-6x+4x+12-17=0$

$$\Leftrightarrow 2x^2-2x+4=0 \text{(vô nghiệm)}$$

Với $y=2$ ta có: $2x^2+4-4x+4x+8-17=0$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5=0 \text{ (loại)}$$

Với $y=1$ ta có: $2x^2+1-2x+4x+4-17=0$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2(tm) \\ x=-3(ktm) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow z=x+y-2=1$$

Vậy $x=2;\ y=1;\ z=1$ thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

2) Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2=c^2$. Chứng minh ab chia hết cho $a+b+c$

Hướng dẫn Giải

Đặt $t=a+b+c$ $(t\ge 0)\Rightarrow c=t-a-b$ ta có:

$$a^2+b^2=c^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=(t-a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2=t^2+a^2+b^2-2ta-2tb+2ab$$

$$\Leftrightarrow 0=t^2-2ta-2tb+2ab$$

$$\Leftrightarrow ab=\frac{-t^2+2ta+2tb}{2}=t\left(\frac{-t+2a+2b}{2}\right)=(a+b+c)\left(\frac{-t+2a+2b}{2}\right)$$

Vậy ab chia hết cho a+b+c (đpcm)

Bài III (1,5 điểm):

Cho các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=3$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P=\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(2b+c+a)^2}+\frac{1}{(2c+a+b)^2}$$

Hướng dẫn giải

Ta áp dụng BĐT quen thuộc sau: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}\Leftrightarrow\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi x = y.

Ta có: $\frac{1}{2a+b+c}=\frac{1}{(a+b)+(a+c)}\le\frac{1}{4}(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c})$

Tương tự và cộng các vế ta có:

$$P \le \frac{1}{16}[(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c})^2+(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c})^2+(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c})^2]$$

$$\rightarrow 16P \le \frac{2}{(a+b)^2}+\frac{2}{(a+c)^2}+\frac{2}{(b+c)^2}+\frac{2}{(a+b)(a+c)}+\frac{2}{(a+c)(b+c)}+\frac{2}{(a+b)(b+c)}$$

Ta tiếp tục áp dụng bổ đề sau:

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z)^2-2xy-2yz-2xz \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+xz$$

Với x, y, z tương ứng là $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{b+c}$ ta có ngay:

$$16P \le \frac{4}{(a+b)^2}+\frac{4}{(a+c)^2}+\frac{4}{(b+c)^2}$$

Tiếp tục áp dụng bổ đề đầu tiên: $\frac{1}{a+b} \le \frac{1}{4}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \rightarrow \frac{1}{(a+b)^2} \le \frac{1}{16}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})^2$

Tương tự và cộng vế với vế ta có:

$$16P \le 4.\frac{1}{16}[(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})^2+(\frac{1}{a}+\frac{1}{c})^2+(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2] = \frac{1}{4}.(\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}+\frac{2}{c^2}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{ac}+\frac{2}{bc})$$

Tiếp tục áp dụng bổ đề số 2 với x, y, z lần lượt là: $\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}$ thì:

$$16P \le \frac{1}{4}.4.(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}) = 3 \rightarrow P \le \frac{3}{16}.$$

Vậy GTLN của P là $\frac{3}{16}$, đạt tại chẳng hạn $a=b=c=1$.

Bài IV (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC (với AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là trung điểm của cạnh BC, E là hình chiếu của điểm A trên cạnh BC và H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F.

1) Chứng minh $BC^2=4.DA.DF$.

2) Tia DH cắt đường tròn (O) tại điểm G. Chứng minh bốn điểm A, G, E và D cũng thuộc một đường tròn.

3) Đường thẳng FE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Chứng minh đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác GKE.

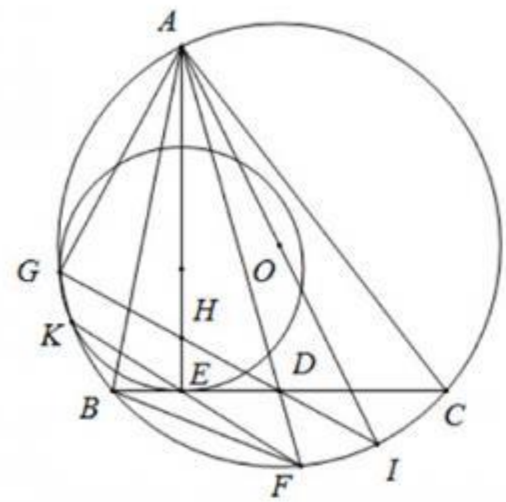
Hướng dẫn giải:

1) Xét Δ ADC và Δ BDF có góc ADC = góc BDF (đối đỉnh); góc DAC = góc DBF (2 góc nội tiếp cùng chắn cung CF) nên

$$\Delta ADC \backsim \Delta BDF\ (g.g) \Rightarrow \frac{AD}{BD}=\frac{DC}{DF}$$

$$\Rightarrow AD.DF = BD.DC = \frac{BC}{2}.\frac{BC}{2}=\frac{BC^2}{4}$$

$$\Rightarrow BC^2 = 4DA.DF$$



2) Gọi I là điểm đối xứng với A qua O ⇒ AI là đường kính của (O)

⇒ góc ABI = góc ACI = 90° (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

⇒ IB // CH (cùng ⊥ AB) và IC // BH (cùng ⊥ AC)

⇒ IBHC là hình bình hành ⇒ HI đi qua trung điểm D của BC

⇒ G, H, D, I thẳng hàng

⇒ góc DGA = 90° (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Ta có góc DGA = góc DEA = 90°⇒ AGED là tứ giác nội tiếp

⇒ 4 điểm A, G, E, D cùng nằm trên một đường tròn.

3) Vì AGED là tứ giác nội tiếp nên

góc EGD = góc EAD = 90° – góc EDA = 90° – (góc DEF + góc DFE)

⇒ góc KEB = góc DEF = 90° – (góc EGD + góc DFE) (1)

Vì AGKF là tứ giác nội tiếp nên góc DEF = 180° – góc AGK = 90° – góc EGD – góc EG (2)

Từ (1) và (2) ⇒ góc KEB = 90° – (90° – góc EGK) = góc EGK

⇒ góc KEB = góc EGK

Gọi Et là tia tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp Δ GKE (Et và G nằm khác phía đối với EK)

⇒ góc KEB = góc KEt (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung EK)

⇒ góc KEt = góc KEB ⇒ Et ≡ EB

Vậy BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp Δ GKE (đpcm)

Bài V: (1 điểm)

Ta viết lên bảng 99 số tự nhiên liên tiếp 1; 2; 3; …..; 99. Ta thực hiện thao tác sau:

Xóa ba số *a, b, c* bất kì trên bảng rồi lại viết lên bảng số $(abc+ab+bc+a+b+c)$.

Tiếp tục thực hiện thao tác trên cho đến khi bảng còn lại đúng một số. Tìm số còn lại đó.

Hướng dẫn giải:

Ta có $abc+ab+bc+ca+a+b+c=(a+1)(b+1)(c+1)-1$

Tại mỗi thao tác thứ nhất ta chọn xóa 3 số a, b, c và thay bằng $(a+1)(b+1)(c+1)-1$, ta thấy thao tác này không làm thay đổi tích $S=(a_1+1)(a_2+1)...(a_i+1)$ với $a_1,a_2,...,a_i$ là tất cả các số còn lại trên bảng.

Vì vậy số cuối cùng còn lại bằng: $(1+1)(2+1)(3+1)...(99+1)-1=100!-1$