

Đề tuyển sinh I10 THPT chuyên Amsterdam, Nguyễn Huệ, Chu Văn An.

**Cấu trúc đề thi:**

**Câu 1.** Giải phương trình - Giải hệ phương trình.

**Câu 2.** Biểu thức đại số.

**Câu 3.** Chứng minh bất đẳng thức.

**Câu 4.** Bài toán hình học phẳng về đường tròn

**Câu 5.** Số hữu tỉ.

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI**

**KÌ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN  
Năm học 2016 – 2017**

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Môn thi : **TOÁN**

Ngày thi : 09 tháng 6 năm 2016

Thời gian làm bài : 150 phút

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán)

**Bài I (2,0 điểm)**

1) Giải phương trình  $x^4 - 2x^3 + x - \sqrt{2(x^2 - x)} = 0$ .

2) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + 2y - 4x = 0 \\ 4x^2 - 4xy^2 + y^4 - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

**Bài II (2,0 điểm)**

1) Cho các số thực  $a, b, c$  đôi một khác nhau thỏa mãn  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$  và  $abc \neq 0$ . Tính  $P = \frac{ab^3}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^3}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^3}{c^2 + a^2 - b^2}$ .

2) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên  $(x; y)$  thỏa mãn  $2^x \cdot x^2 = 9y^2 + 6y + 16$ .

**Bài III (2,0 điểm)**

1) Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Chứng minh

$$\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a+b+c.$$

2) Cho số nguyên dương  $n$  thỏa mãn  $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$  là số nguyên. Chứng minh  $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$  là số chính phương.

**Bài IV (3,0 điểm)**

Cho tam giác nhọn  $ABC$  có  $AB < AC$  và nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Các đường cao  $BB', CC'$  cắt nhau tại điểm  $H$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tia  $MH$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm  $P$ .

1) Chứng minh hai tam giác  $BPC'$  và  $CPB'$  đồng dạng.

2) Các đường phân giác của các góc  $\widehat{BPC'}$ ,  $\widehat{CPB'}$  lần lượt cắt  $AB, AC$  tại các điểm  $E$  và  $F$ . Gọi  $O'$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AEF$ ;  $K$  là giao điểm của  $HM$  và  $AO'$ .

a) Chứng minh tứ giác  $PEKF$  nội tiếp.

b) Chứng minh các tiếp tuyến tại  $E$  và  $F$  của đường tròn  $(O')$  cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn  $(O)$ .

**Bài V (1,0 điểm)**

Cho 2017 số hữu tỷ dương được viết trên một đường tròn. Chứng minh tồn tại hai số được viết cạnh nhau trên đường tròn sao cho khi bỏ hai số đó thì 2015 số còn lại không thể chia thành hai nhóm mà tổng các số ở mỗi nhóm bằng nhau.

-----Hết-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh : ..... Số báo danh : .....

Họ tên, chữ kí của cán bộ coi thi số 1 : ..... Họ tên, chữ kí của cán bộ coi thi số 2 : .....

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 – HỆ CHUYÊN

MÔN TOÁN

Bài 1.

1.  $x^4 - 2x^3 + x - \sqrt{2(x^2 - x)} = 0$  (Điều kiện:  $x \leq 0; x \geq 1$ )

$$\Leftrightarrow (x^2 - x)^2 - (x^2 - x) - \sqrt{2(x^2 - x)} = 0 \quad (1)$$

Đặt  $\sqrt{x^2 - x} = t$  ( $t \geq 0$ )

Khi đó, (1) trở thành

$$t^4 - t^2 - \sqrt{2}t = 0 \Leftrightarrow t(t^3 - t - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow t(t - \sqrt{2})(t^2 + \sqrt{2}t + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \quad (\text{Do } t^2 + \sqrt{2}t + 1 > 0 \forall t)$$

$$t = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad (\text{Chọn})$$

$$t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x} = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \quad (\text{Chọn})$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $x \in \{0; 1; 2; -1\}$

2.  $\begin{cases} x^2 + 2y - 4x = 0 \\ 4x^2 - 4xy^2 + y^4 - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = -2y+4 \\ (2x-y^2)^2 - 2y+4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = -2y+4 \\ (2x-y^2)^2 + (x-2)^2 = 0 \end{cases} \quad (1)$

Vì  $(2x - y^2)^2; (x - 2)^2 \geq 0 \forall x; y \Rightarrow (2x - y^2)^2 + (x - 2)^2 \geq 0 \forall x; y$

Do đó, từ (1) suy ra:  $\begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ (2x-y^2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2x - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \pm 2 \end{cases}$

Thay vào, chỉ có  $(x; y) \in \{(2; 2)\}$  đúng. Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là  $(x; y) \in \{(2; 2)\}$

Bài 2.

1.

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \Leftrightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$$

(do a; b; c khác nhau)

$$\Rightarrow \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{ab^2}{b^2 + (a - c)(a + c)} = \frac{ab^2}{b^2 - b(a - c)} = \frac{ab}{b - a + c} = \frac{ab}{-a - a} = \frac{-b}{2}$$

Tương tự với 2 số hạng còn lại. Vậy biểu thức cần tính bằng  $\frac{-b}{2} + \frac{-c}{2} + \frac{-a}{2} = 0$

Đề tuyển sinh I10 THPT chuyên Amsterdam, Nguyễn Huệ, Chu Văn An.

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 2^x \cdot x^2 = (3y+1)^2 + 15$$

$$\forall \begin{cases} 3y+1 \equiv 1 \pmod{3} \\ 15 \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow (3y+1)^2 + 15 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow 2^x \cdot x^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{3} \text{ (Vì số chính phương chia 3 chỉ dư 0 hoặc 1)}$$

$$\Rightarrow 2^x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow x = 2k \ (k \in \mathbb{N})$$

$$\text{Vậy } 2^{2k} \cdot (2k)^2 - (3y+1)^2 = 15 \Leftrightarrow (2^k \cdot 2k - 3y - 1)(2^k \cdot 2k + 3y + 1) = 15$$

$$\text{Vì } y, k \in \mathbb{N} \text{ nên } 2^k \cdot 2k + 3y + 1 > 2^k \cdot 2k - 3y - 1 > 0$$

Vậy ta có các trường hợp

$$+/\begin{cases} 2^k \cdot 2k - 3y - 1 = 1 \\ 2^k \cdot 2k + 3y + 1 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k \cdot 2k = 8 \\ 3y + 1 = 7 \end{cases} \Rightarrow k \notin \mathbb{N} \text{ (loại)}$$

$$+/\begin{cases} 2^k \cdot 2k - 3y - 1 = 3 \\ 2^k \cdot 2k + 3y + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k \cdot 2k = 4 \\ 3y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (TM)}$$

$$\text{Vậy } (x; y) = (2; 0).$$

Bài 3.

1.

Dễ thấy:

$$3 = a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \Rightarrow a+b+c \leq 3$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} &= \frac{4a^4}{2a^3+2a^2b^2} + \frac{4b^4}{2b^3+2b^2c^2} + \frac{4c^4}{2c^3+2c^2a^2} \\ &\geq \frac{(2a^2+2b^2+2c^2)^2}{2a^3+2b^3+2c^3+2a^2b^2+2c^2b^2+2a^2c^2} \\ &\geq \frac{36}{a^4+a^2+b^4+b^2+c^4+c^2+2a^2b^2+2c^2b^2+2a^2c^2} \\ &= \frac{36}{(a^2+b^2+c^2)^2+a^2+b^2+c^2} = 3 \geq a+b+c \end{aligned}$$

2.

$$2+2\sqrt{12n^2+1} \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 2\sqrt{12n^2+1} \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \sqrt{12n^2+1} \in \mathbb{Q}$$

Đề tuyển sinh I10 THPT chuyên Amsterdam, Nguyễn Huệ, Chu Văn An.

$$\Rightarrow \sqrt{12n^2 + 1} = m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 12n^2 = m^2 - 1 \not\equiv 4 \Rightarrow m = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}.$$

$$12n^2 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k(k + 1) \Rightarrow 3n^2 = k(k + 1) \not\equiv 3 \Rightarrow k \not\equiv 3 \text{ hoặc } k + 1 \not\equiv 3.$$

$$\text{TH1: } k = 3q, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3n^2 = 3q(3q + 1) \Rightarrow n^2 = q(3q + 1)$$

$$\text{Vì } (q, 3q + 1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} q = a^2 \\ 3q + 1 = b^2 \end{cases} \Rightarrow 3a^2 + 1 = b^2 \quad (1)$$

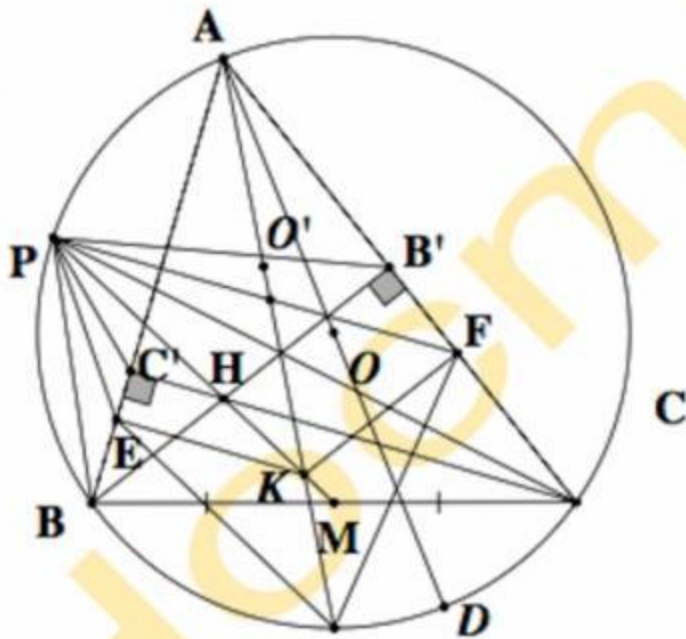
$$\text{Ta có: } 2 + 2\sqrt{12n^2 + 1} = 2 + 2m = 2 + 2(2k + 1) = 4 + 4.3q = 4 + 12q = 4 + 12q^2 = 4b^2 \quad (\text{do (1)})$$

$\Rightarrow$  đpcm.

TH2:  $k = 3q + 1$ : Chứng minh tương tự.

Bài 4.

Hình vẽ:



1. AO cắt (O) tại D thì AD là đường kính của (O).

$$\Rightarrow \angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$$

$$\Rightarrow BD \parallel CH \text{ và } CD \parallel BH.$$

$$\Rightarrow \text{Tứ giác HBDC là hình bình hành.}$$

$$\Rightarrow DH \text{ cắt } BC \text{ tại trung điểm của } BC \text{ và cũng là trung điểm của } DH.$$

$$\Rightarrow D, M, H, P \text{ thẳng hàng.}$$

$$\Rightarrow \angle APD = 90^\circ \text{ hay } \angle APH = 90^\circ.$$

$$\Rightarrow P \text{ thuộc đường tròn đường kính } AH.$$

Đề tuyển sinh I10 THPT chuyên Amsterdam, Nguyễn Huệ, Chu Văn An.

Lại có  $AB'H = AC'H = 90^\circ$ .

$\Rightarrow B', C'$  thuộc đường tròn đường kính AH.

Vậy A, P, B', C', H cùng thuộc đường tròn đường kính AH.

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow AB'P = AC'P \\ PC'B + PC'A = 90^\circ \\ PB'C + PB'A = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow PC'B = PB'C.$$

Xét đường tròn (O):  $PCB' = PBC'$  (góc cùng chắn cung AP)

Mà  $PC'B = PB'C \Rightarrow \triangle PB'C \sim \triangle PC'B$  (g - g) (Đpcm)

2. PE, PF lần lượt là phân giác của  $BPC'$  và  $CPB'$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} EPC' = \frac{1}{2} BPC' \\ FPB' = \frac{1}{2} CPB' \end{array} \right.$$

Mà  $BPC' = CPB'$  do  $\triangle BPC' \sim \triangle CPB' \Rightarrow EPC' = FPB'$ .

Xét  $\triangle PEC'$  và  $\triangle PFB'$  có:

$$\left. \begin{array}{l} EPC' = FPB' \text{ (cmt)} \\ PC'E = PB'F \text{ (} \triangle BPC' \sim \triangle CPB' \text{)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle PEC' \sim \triangle PFB' \text{ (g - g)}$$

$\Rightarrow PEC' = PFB'$  hay  $PEA = PFA$ .

$\Rightarrow$  Tứ giác APEF nội tiếp.

O' là tâm ngoại tiếp  $\triangle AEF$  nên là tâm ngoại tiếp tứ giác APEF.

Gọi K' là giao của AO' với (O') thì AK' là đường kính.

$\Rightarrow \angle APK' = 90^\circ \Rightarrow K \in PD$  vì  $\angle APD = 90^\circ$

$\Rightarrow K$  là giao của PD và AO' hay  $K'$  là giao của MH và AO'  $\Rightarrow K \equiv K' \Rightarrow K \in (O)$

Hay tứ giác PEKF nội tiếp.

#### Bài 5.

Ta có thể đưa về bài toán mà 2017 số là các số nguyên dương (quy đồng mẫu số các số hữu tỷ, được từ số là các số nguyên dương).

Ta gọi ước chung lớn nhất của 2017 số nguyên dương này là d, chia tất cả các số cho d ta đưa được về bài toán với 2017 số nguyên dương mà ước chung lớn nhất của chúng bằng 1.

## Đề tuyển sinh I10 THPT chuyên Amsterdam, Nguyễn Huệ, Chu Văn An.

TH1: Tổng 2017 số là số lẻ. Nếu tất cả các cặp số cạnh nhau khác tính chẵn lẻ thì sẽ có chẵn số mà 2017 lẻ nên sẽ tồn tại 2 số chẵn hoặc 2 số lẻ cạnh nhau, bỏ 2 số này (có tổng chẵn) ta còn 2015 số có tổng lẻ, nên cũng không chia thành 2 nhóm có tổng bằng nhau được.

TH 2: Tổng 2017 số là số chẵn, không thể cả 2017 số này đều chẵn, do đó có 1 số lẻ (2) (vì đang giả sử chúng có UCLN là 1), và cũng không đều lẻ được (3).

Do (2) và (3) nên sẽ tồn tại 1 số chẵn cạnh 1 số lẻ, 2015 số còn lại có tổng là số lẻ, suy ra sẽ không thể chia thành 2 nhóm có tổng bằng nhau.



Nguồn: thầy Hồng Trí Quang – Giáo viên Hệ thống giáo dục HOCMAI.