

**Câu 1:** (2.0 điểm)

1) Giải phương trình  $(a-1)x^2 - 4x + 3 = 0$  trong mỗi trường hợp sau:

a) Khi  $a = 1$ .

b) Khi  $a = 2$ .

2) Giải hệ phương trình  $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 5 + y = 4x \end{cases}$ .

**Câu 2:** (2.0 điểm)

Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1}$  (với  $a > 0, a \neq 1$ ).

1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $a = 3 + 2\sqrt{2}$ .

2) Tìm các giá trị của  $a > 1$  để biểu thức  $A \leq \frac{1}{2}$ .

**Câu 3:** (2.0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho đường thẳng  $d: y = 2(a+1)x + 15 - 2a$  và Parabol  $(P): y = x^2$  ( $a$  là tham số)

1) Tìm giá trị của  $a$  để đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $A(-1; 1)$ .

2) Tìm tất cả các giá trị  $a > 0$  để đường thẳng  $d$  và Parabol  $(P)$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt  $B(x_1; y_1)$ ,  $C(x_2; y_2)$  thỏa mãn  $x_1x_2 + y_1 + y_2 = 2a + 27$ .

**Câu 4:** (3.0 điểm).

Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $C$  là một điểm nằm giữa  $A$  và  $B$ . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ  $AB$  vẽ hai tia  $Ax$ ,  $By$  vuông góc với  $AB$ . Trên tia  $Ax$  lấy một điểm  $I$  ( $I$  khác  $A$ ), đường thẳng vuông góc với tia  $CI$  tại  $C$  cắt tia  $By$  tại  $K$ . Đường tròn đường kính  $IC$  cắt  $IK$  tại điểm thứ hai  $P$ .

1) Chứng minh bốn điểm  $C, P, K, B$  cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh  $AI \cdot BK = AC \cdot BC$ .

3) Cho biết  $A, B, I$  cố định. Xác định vị trí điểm  $C$  trên đoạn thẳng  $AB$  sao cho diện tích hình thang vuông  $ABKI$  là lớn nhất.

**Câu 5:** (1.0 điểm)

Cho  $x, y > 0, x + y = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = 8(x^4 + y^4) + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{y^5} + \frac{1}{x^2 y^2} - \frac{40}{xy}$$

..... HẾT .....

Họ và tên thí sinh: ..... Số báo danh: .....

*Thí sinh không được sử dụng bất kỳ tài liệu nào trong khi thi. Giám thị không giải thích gì thêm.*

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu	ý	Nội dung	Điểm
1	1)	Giải phương trình $(a-1)x^2 - 4x + 3 = 0$ trong mỗi trường hợp sau:	1.0 điểm
		a) Khi $a = 1$ : Phương trình là $-4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$ .	0.5
		b) Khi $a = 2$ : Phương trình là $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$ .	0.5
	2)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 5 + y = 4x \end{cases}$ .	1.0 điểm
		Sử dụng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng ta có nghiệm $(x; y)$ là $(1; -1)$ .	1.0
2		Cho biểu thức: $A = \left( \frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1}$ (với $a > 0, a \neq 1$ ).	2.0 điểm
	1)	Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$ .	1.0 điểm
		Với $a > 0, a \neq 1$ , ta có: $A = \left( \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-1)^2} = \frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} : \frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-1)^2} = \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$ .	0.5
		Lại có $a = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{2}+1$ . Vậy $A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = 2 - \sqrt{2}$ .	0.5
	2)	Tìm các giá trị của $a > 1$ để biểu thức $A \leq \frac{1}{2}$ .	1.0 điểm
		Với $a > 1, A \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} \leq \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow \sqrt{a} \leq 2 \Leftrightarrow a \leq 4$ Kết hợp với điều kiện $a > 1$ , ta được $1 < a \leq 4$ .	0.5 0.5
3		Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho đường thẳng $d: y = 2(a+1)x + 15 - 2a$ và Parabol $(P): y = x^2$ ( $a$ là tham số).	2.0 điểm
	1)	Tìm giá trị của $a$ để đường thẳng $d$ đi qua điểm $A(-1; 1)$ .	0.5 điểm
		Thay $x = -1; y = 1$ vào phương trình đường thẳng $d: y = 2(a+1)x + 15 - 2a$ Ta được: $1 = 2(a+1)(-1) + 15 - 2a \Leftrightarrow -4a + 12 = 0 \Leftrightarrow a = 3$ .	0.5
	2)	Tìm tất cả các giá trị $a > 0$ để đường thẳng $d$ và Parabol $(P)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $B(x_1; y_1), C(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1x_2 + y_1 + y_2 = 2a + 27$ .	1.5 điểm
		Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị là $x^2 - 2(a+1)x - 15 + 2a = 0$ (1)	0.25

	Phương trình (1) có $\Delta' = (a+1)^2 - (2a-15) = a^2 + 16 > 0; \forall a \in \mathbb{R}$ .	
	Theo hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(a+1) \\ x_1 x_2 = 2a-15 \end{cases} \quad (2)$	0.25
	Mà $x_1 x_2 + y_1 + y_2 = 2a + 27 \Leftrightarrow x_1 x_2 + x_1^2 + x_2^2 = 2a + 27 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 = 2a + 27 \quad (3)$	0.50
	Thay (2) vào (3) và biến đổi ta được phương trình $a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$ .	0.25
	Kết hợp với điều kiện $a > 0$ thì giá trị cần tìm của $a$ là $a = 1$ .	0.25
	Cho đoạn thẳng $AB$ và $C$ là một điểm nằm giữa $A$ và $B$ . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ $AB$ vẽ hai tia $Ax, By$ vuông góc với $AB$ . Trên tia $Ax$ lấy một điểm $I$ ( $I$ khác $A$ ), đường thẳng vuông góc với tia $CI$ tại $C$ cắt tia $By$ tại $K$ . Đường tròn đường kính $IC$ cắt $IK$ tại điểm thứ hai $P$ .	3.0 điểm
4	1) Chứng minh bốn điểm $C, P, K, B$ cùng thuộc một đường tròn.	1.0 điểm
	Ta có: $\widehat{KBC} = 90^\circ$ (giả thiết) và $\widehat{IPC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{CPK} = 90^\circ$ .	0.5
	Khi đó: $P, B$ cùng chắn $CK$ dưới một góc $90^\circ$ (bài toán cung chứa góc) Nên bốn điểm $C, P, K, B$ cùng thuộc một đường tròn (đpcm).	0.5
	2) Chứng minh $AI \cdot BK = AC \cdot BC$ .	1.0 điểm
	Xét $\Delta ACI$ và $\Delta BKC$ có: $\widehat{IAC} = \widehat{CBK} = 90^\circ$ và $\widehat{AIC} = \widehat{BCK}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)	0.5
	Nên $\Delta ACI \sim \Delta BKC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AC}{BK} = \frac{AI}{BC} \Leftrightarrow AI \cdot BK = AC \cdot BC$ (đpcm).	0.5
	3) Cho biết $A, B, I$ cố định. Xác định vị trí điểm $C$ trên đoạn thẳng $AB$ sao cho diện tích hình thang vuông $ABKI$ là lớn nhất.	1.0 điểm
	Ta có diện tích của hình thang là $S_{ABKI} = \frac{1}{2}(AI + BK)AB$ . Do $A, B, I$ cố định nên đặt $AI = b > 0, AB = 2a > 0, a, b$ là hằng số.	0.25
	Từ chứng minh 2): $AI \cdot BK = AC \cdot BC \Leftrightarrow BK = \frac{AC \cdot BC}{AI} = \frac{AC(AB - AC)}{AI} = \frac{-AC^2 + AB \cdot AC}{AI}$ . Đặt $AC = x; 0 < x < 2a$ thì $BK = \frac{-x^2 + 2ax}{b}$ . Ta cần tìm $x$ để $BK$ là lớn nhất.	0.25

	Lại có $-x^2 + 2ax = a^2 - (a-x)^2 \leq a^2; \forall x \in (0; 2a)$ , dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = a > 0$ , suy ra $BK \leq \frac{a^2}{b}$ .	0,25
	Do $AI, AB$ không đổi nên $S_{ABKI}$ là lớn nhất khi $BK$ lớn nhất. Vậy $AC = a$ , hay $C$ là trung điểm của $AB$ .	0,25
5	Cho $x, y > 0, x + y = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = 8(x^4 + y^4) + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{y^5} + \frac{1}{x^2 y^2} - \frac{40}{xy}$	1,0 điểm
	Áp dụng bất đẳng thức $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ (đúng với $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ). Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b$ . Ta có $8(x^4 + y^4) \geq 4(x^2 + y^2)^2 = [2(x^2 + y^2)]^2 \geq (x+y)^4 = 1$ (1)	0,25
	Áp dụng bất đẳng thức Cô-si: $\frac{1}{x^5} + \frac{1}{y^5} = \left(\frac{1}{x^5} + 64x\right) + \left(\frac{1}{y^5} + 64y\right) - 64(x+y) \geq 16\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) - 64 \geq \frac{32}{xy} - 64$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2), suy ra: $M \geq 1 + \frac{32}{xy} - 64 + \frac{1}{x^2 y^2} - \frac{40}{xy} = \left[\frac{1}{x^2 y^2} - \frac{8}{xy} + 16\right] - 79 = \left(\frac{1}{xy} - 4\right)^2 - 79 \geq -79$ Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$ .	0,25
	Vậy giá trị nhỏ nhất của $M = -79$ khi $x = y = \frac{1}{2}$	0,25

**Nếu thí sinh làm bài theo cách khác so với hướng dẫn chấm và đúng thì vẫn chấm điểm theo mức điểm của từng câu, từng ý.**

..... Hết .....